This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

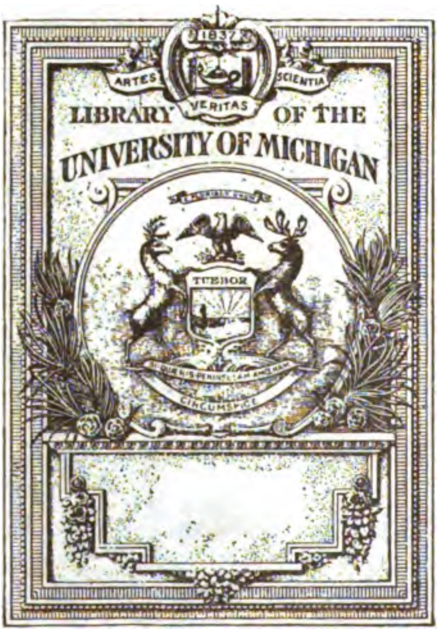
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

QA
31
E88
S731
1607



CLIDIS
STERIORES
IBRI IX.

XVI. De Solidorum Regula-
bet intra quodlibet comparatione.

RSPICVIS DEMONSTRA-
tiq; ſcholiis illuſtrati: nunc quartò editi,
um rerum acceſsione poſt primam
editionem locupletati.

Auctore
OPHORO CLAVIO
rgenſi è Societate Iesv.



ANCOFVRTI
pographica Nicolai Hoffmanni, ſumptibus
NÆ RHODII.
DC VII.

QA
31
E88
S5731
1607

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Euclides

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Acceſſit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRAtionibus, accuratiſq; ſcholiis illuſtrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum acceſſione poſt primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergenſi è Societate IESV.



FRANCOFVRTI
Ex officina typographica Nicolai Hoffmanni, ſumptibus
IONÆ RHODII.
M. DC VII.

MU
gen.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

Vnitas eſt, ſecundum quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

HActenus egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt abſq; ea ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neque ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vſum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non raro pleraq; laterum ſunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur. Vel ſi non ſunt Irrationales, longitudine certe inter ſe ſunt, incommenſurabiles atq; adeo ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundẽ linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, vt abſq; his nullo modo cognoſcatur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ ſuus ordo, ratioq; conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequẽtibus, circa numerorum proprietates, affectioneſq;, quantum eæ rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more ſuo à principijs, definit initio vnitatem, docetq; eam eſſe, ſecundum quam vnumquodq; eorũ, quæ ſunt,

a 2 *vnum*

405014

vnum eſſe dicitur. Nam ſecundum vnitatem vnum lapidem, vnũ animal, vnum corpus, & c. dicere ſolemus. Cæterum vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus compoſita multitudo.

Cum numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus compoſita, manifeſtum eſt, numerum quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates quarum quælibet, octaua pars dicitur octonarij. Sic quoq; numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus. in totidem diſtribuitur, quarum quælibet centeſima ipſius pars eſt, & c.

Ex his ſequitur, omnes numeros, quotcunque ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos vna eademq; menſura, nimirum vnitas vt dictum eſt, metiatur: Idquod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurima earum menſuram communẽ non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſime lib. 10. oſtendetur.

III.

Pars eſt numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

Non eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ expoſuit Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc ſolum propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorũ 12. 18 24. 30. 60. 600. &c. quia ille ſingulos hos metitur Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cũ illũ ſinguli hi metiantur, vt perſpicuũ eſt.

Omnis autem pars ab eo numero nomen ſibi ſumit per quem ipſa numerum, cuius pars eſt, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit ſeptima pars numeri 42 & in reliquis eodem modo.

IV.

Partes autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem ſed partes appellari: cuiuſmodi eſt numerus 5. ſi conferatur cũ hoc numero 18. Quamuis enim, cum non metiatur, niſi per ſuas vnitates pars ipſius dici non debeat; apte tamẽ congruenterq; partes poterit appellari, quod quinq; contineat vnitates,

tes, quarum qualibet decimaoctaua pars eſt numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimaoctauas numeri 18. Ex quibus liquido conſtat, Euclidem nomine partis intellexiſſe partem aliquotam tantum, non autem & aliquantã, vt volunt nonnulli; alioquin ſuperuacanea eſſet hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

Cæterum partes quæcunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum menſura vtrumque eorum metitur, & eum ſcilicet, qui partes dicitur, & eũ, cuius ille partes appellatur: Ita vt ſi communis eorum numerorũ menſura metiatur minorẽ per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes ſunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mẽſura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus ſex decimas eiuſdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis menſura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

Quod ſi roges, cur Euclides hoc loco non ſolum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars eſt, verum etiã illum, qui partes non autem idipſũ quinto lib. in magnitudinibus præſtiterit; Neq; enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur partes appellauit; ſed tantum eam, quæ maiorem metitur, partem. Reſpondemus, huius rei cauſam eſſe, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars eſt, aut partes, vt propoſ. 4. huius lib. oſtendetur; pars quidẽ, cũ ipſũ metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus lõge aliter ſe res habet. Non enim propoſitis duabus magnitudinib. inæqualibus neceſſario minor aut pars aut partes eſt maioris, cũ eæ perſæpe ſint incommẽſurabiles, vt aperte liber decimus demonſtrabit, atq; adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nã ſolum in magnitudinibus commenſurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, ſi illũ non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

Multiplex vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

Quemadmodum ille ſolum numerus minor, maioris pars dicitur qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur. adeo vt numerus maior, cuius minor eſt pars, ſit viciſſim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars eſt numeri 30. & hic illius multiplex eſt &c. Si vero maiorem minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex eſſet, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et viciſſim, ſi maior minoris

non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur: Nam ſi metiretur minor maiorem, eſſet per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

Par numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4.10.40.100.1000. *pares vocantur, quoniã diuiduntur bifariam, ſiue in duas partes æquales, cum eorum dimidia ſint* 2.5.20 50.500.

VII.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur. vel qui vnitate differt à pari.

Omnes hi numeri 5.11.15.37.101.1001. *impares nominantur quia bifariam diuidi nequeunt Vel certe quia vnitate differunt ab his paribus* 4.10.14.36 100.1000. *vel etiam ab his* 6 12.16.38.102.1002. *Ex hoc autem loco perſpicue colligi poteſt, vnitatẽ in numeris prorſus eſſe indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeo bifariã diuidi poſſet. Nam huius imparis* 11. *dimidia pars eſſet quinque vnitates & ſemis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.*

VIII.

Pariter par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.

Quia numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltẽ binarius, metiatur. Numerus igitur ille par; quem par numerus metitur per numerũ parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. *metitur enim ipſum par numerus* 8 *per numerum parem* 4. *Ita quoque par numerus* 24. *pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus* 4. *metiatur per numerum parem* 6. *&c.*

IX.

Pariter autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Quod ſi numerum parem metiatur numerus par per imparẽ numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. *Metitur enim eum numerus par* 2, *per imparem numerum* 15 *Sic quoq; par numerus* 6 *metitur eundem per numerum imparem* 5 *&c.*

Cæterum ſi recte duæ proximæ definitiones expendantur perſpicuum erit fieri poſſe, vt vnus idemq; numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar Nam par numerus 24. *cum eum metiatur par numerus* 6. *per numerum parem* 4. *pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par* 8. *metitur per numerũ imparem* 3. *pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdum.*

ſurdum vt excluderẽt numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares & pariter impares videntur eſſe, addiderunt vtriq; definitioni particulam, tantũ, ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par numerus metitur per numerũ parem tantũ, Pariter aũt impar, quam par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita n. fit vt propoſitus numerus par 24, neq; pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiã par 8 per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum vt dictum eſt, par 8 per imparem 3. verum etiã par 6, per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodãmodo naturã vtriuſq; vt conſtat. Itaq; tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maxime diuerſa: Pariter par; pariter impar: pariter par & pariter impar, qui à quibuſdã, pariter par & impariter appellabitur. Veruntamen hæc omnia vera quidẽ ſunt & ex ſententia Pythagoreorum Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt & ex definitionib. traditis, in quibus nõ reperitur dictio iſta tantum, quam illi apponunt & ex propoſ. 32. 33. 34, lib. 9, vbi manifeſte omnem numerum parem, quam aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonſtratq; omnes numeros à binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantum, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum, Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18 22, &c. Numeros denique qui nec à binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28 48. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demõſtrationibus illarum propoſitionum, hos poſtremos numeros, alioſq; ſimiles, vere eſſe, ſecundum traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

Impariter vero impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt hic numerus impar 15 impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5, numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

Primus numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

Quod ſi numerum quempiã nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita neq; pariter par, neq; pariter impar, neq; impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus primus; quales ſunt omnes iſti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura metitur.

Sicut numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus metitur: ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli eorum habeant numeros, qui eos præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15. 8 ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur. quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5 poſteriorem vero iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrumq; metitur ſed ſola vnitas vtriuſq; eſt cõmunis menſura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum menſuram cõmunem, quamquã poſtremi duo habeant communem menſuram hunc numerum 5. Deniq; vnitas, & quiuis numerus, dici poſſunt, licet impropriè, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIII.

Compoſitus numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.

Numerum, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum horum numerorum 3. 5 metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIV.

Compoſiti autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

Duo numeri, vel plures, quos præter vnitatẽ, aliquis alius numerus, tanquã menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, licet non quilibet ſit cõpoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatẽ, numerus quiſpiam metitur, cõpoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24 compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3, tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe cõpoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & ſeipſum, & reliquos duos metitur; licet per ſe ſumptus, Primus vocatur.

NVME-

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

Vt numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. ſexies fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque viciſſim numerus 8 multiplicare dicetur numerum 6. ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcil. quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusq; eundem numerũ 48. Eadem deniq; ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicetur multiplicare numerum 456. cũ hic ſumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci, gigni, procrearíve ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et ſic de reliquis.

Sequitur ex his, productum ex multiplicatione numerũ eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantiũ habet ad vnitatem. Cum n. ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus ſit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium eſt vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicãtium vnitatem cõtinet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrũ multiplicãtium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaq; Multiplicatio ſiue ductus vnius numeri in alium ita quoque deſcribi poterit.

Multiplicatio numeri in numerum, eſt inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

Sic vides ex multiplicatione, ſiue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita ſe habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8 vt 6. ad 1.

Huic definitioni addenda eſt hæc alia docens quid ſit numerum diuidere numerum: quippe quæ neceſſaria omnino ſit ad ea, quæ nos in iis, quæ ſequuntur, ſumus demonſtraturi.

Numerus numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui ſuis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiſo continetur.

Vt numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum ſumptus fue-

ſit numerus 8. qui octo ſuis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis vnitatibus indicat diuidentem numerum 8, in diuiſo 48. contineri ſexies.

Hinc fit numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; cõtinebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continere: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad vnitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque diuiſio vnius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

Diuiſio numeri per numerum, eſt inuentio numeri qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuiſus ad diuidentem.

Ita vides ex diuiſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8, qui ita ſe habet ad 1. vt 48 ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48, per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

Ex his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniã enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B procreatus ita ſe habet ad B, vt C, ad vnitatem D: Ex definitione autem diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B vt C, ad vnitatem D: perſpicuum eſt, numerum ex C in B, genitum eſſe numerum A, cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1.

Hæc omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris cũ fractis: Id eſt, Numerus fractus numerũ fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſiue fracti adhæreant integris, ſiue non) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis. Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiſo cõtinetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoq; numerus, qui ad alterutrũ multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$ multiplicare dicitur numerum 20. quando numer. 20. toties fue-

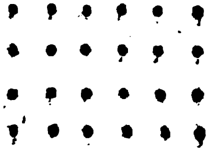
rit com-

rit compoſitus, quod ſunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per ſui ſemiſſẽ duntaxat eſt in $\frac{1}{2}$ ſumendus eſt numerus 20. per ſemiſſem quoque ſui, quæ eſt 10. Ita quoque viciſsim numerus 20. multiplicare dicetur numerũ $\frac{1}{2}$. ſi $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit vicies, toties ſcilicet, quoties vnitas eſt in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem eſſe proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita eſſe 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$ ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. ſe mutuo multiplicare dicuntur quando $\frac{1}{2}$ ſumptus fuerit per tertiam ſui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$ tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$ ſumptus fuerit per ſui ſemiſſem, quia & $\frac{1}{2}$. ſemiſſem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars eſt numeri $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{3}{6}$. & ſemiſsis numeri $\frac{1}{3}$ ſiue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda ſit, in Arithmetica docuimus, demonſtrabimusque ad finem lib. 9.

Rurſus numerus $\frac{1}{2}$ diuidere dicetur numerum 10 cum ſumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiſo numero 10. ita vt eadem proportio ſit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuiſi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoq; $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$ quando ſumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum cõtineri in diuiſo $\frac{1}{6}$. ſed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem ſit qui $\frac{3}{6}$ liquido conſtat tertiam huius partẽ, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat diuiſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica & ad finem lib. 9. demonſtrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuiſioneque fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

Cum autem duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquẽm fecerint, qui factus erit, planus appellabitur, Qui vero numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorũ numerorum planus appellatur, quia ſecũdũ ſuas vnitates in longum, & latum diſpoſitas parallelogrammum rectangulũ refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipſum contineant, non ſecus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambiẽtes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorũ 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius ſunt 4. & 6 quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſita, prout latera exigũt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterũ vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

Cæterum cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras, Euclides ſolum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorũ diſputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, ſimiles ſint & æquales, ſiue ambitum, ſiue aream, capacitatemve ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico. pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum ſpectat: tamẽ ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet. qui diligenter hos Euclidis libros, Arithmeticam Iordani perlegerit.

Poteſt autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8 nec non 2. & 12. quia tã ex multiplicatione 4 in 6. eſt genitus, Ita quoq; numerus planus 100 latera habet 5 & 20: 4. & 25: 2. & 50: 9 & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

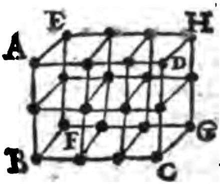
Quia vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quod quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planũ numerum eſſe compoſitum. Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem, aliquando dici poſſe numerum planũ, quamuis impropriè; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

Cum vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24 Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8 & ex 8. in 3 efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12 in 2. generatur 24. appellabi-

pellabitur numerus 24. ſolidus, numeri vero 2.3.4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latũ atque profundum diſpoſitæ referunt figuram quandam ſolidam, quæ parellelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimẽſſones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicantes; vnus quidẽ longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8, baſis ſolidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas. Et ſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur baſis 6. vnitatũ, quæ multipcata in 4. facit totum ſolidum numerũ 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si deniq; numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12 pro baſe, quæ bis ſumpta faciet numerũ eundẽ ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit BCGF, octo vnitatũ, cuius longitudo BC, quatuor vnitates, & BF latitudo duas cumplectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales, vt totus numerus ſolidus cõtineat 24. vnitates, eiuſque altitudo BA vnitates tres. Similiter ſi baſis ſit ABFE, ſex vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latituto BF, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietq; totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinem BC, habens quatuor vnitatum. Si denique baſis ſit ABCD, 12. vnitatum, cuius lõgitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, ſuperponetur illi alia baſis ſimilis, & æqualis EFGH, conſtabitque totus numerus ſolidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus ſolidus 24 habet hæc latera 6.2.2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris ſolidis iudicandum erit.



Denique & vnitas interdum ſolidus appellabitur numerus, et ſi non proprie. quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

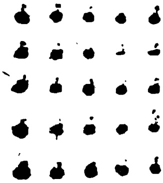
Definit autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione, quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

Planum

Planum illum numerũ, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longũ & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia; vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur; vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nã ſi eius vnitates in formam planam rediguntur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

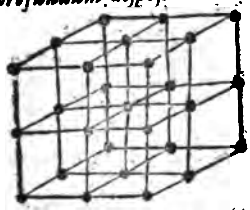


Alteruter autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

Solidum quoque illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum diſpoſita cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint. Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorũ inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorũ multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubũ Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.



Quilibet vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecundi,

eundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eędem partes: Vel certe, cum primus ſecundum & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (huiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba, vel certe cum primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionib. reliquis minoris inæqualitatis. Nam in porportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecũdi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquã deprehendere poſſumus, quando numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecũdi, & tertius quarti, neq; æque multiplex eſt, neq; eadem pars, neq; eædem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemve partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4, lib. 5. vbi omnes proportiones, rationales copioſe explicuimus. Itaq; hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadẽ pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eædem partes ſint, videl. tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exẽplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem videl. ſextam: In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes nimirum tres quartas: In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem videl. quintam, continet: In vltimo deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, bis & præterea eaſdem partes cõplectitur, puta duas partes quintas: Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadẽ pars, vel eadem partes; vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

Quotieſ-

Quotieſcunq; igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferãtur, quod primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, quod primus ſecundum, & tertius quartum, cõtineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes. Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex cõcedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referãtur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

Definit autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur

Ex hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et cõtra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eãdem habet proportionem, æquales eſſe. Cum n. æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem æqualiter contineant, eandemq; inſuper illius partem, vel partes: Itẽ cum idem numerus æqualium ſit vel æque multiplex, vel eadẽ pars, vel eadem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemq; inſuper eorum partem, vel partes, perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

Rurſus quia numeri ad eandem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æque multiplices, vel eadẽ pars, vel eadem partes: Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemq; inſuper illorum partem vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem, manifeſtum eſt numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

Pari ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quam minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionẽ, maiorem eſſe: Ad quem

quem autem idem habet maiorem proportionẽ, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi recte hac definitio intelligatur.

Hac definitio conuenit etiam numeris fractis, ſiue integri numeri ſimul adſint, ſiue non. Nam quatuor hi numeri ſunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt, nimirum duplus, vt patet, ſi priores duo ad eandem denominationem reuocentur vt ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. & poſteriores quoq; ad eandem denominationẽ, vt ad $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$ Quo pacto autem fracti numeri ad eundem denominationẽ reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales ſunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. cum primus ſecundi, & tertius quarti ſit eadem pars, nimirum ſemiſſis, vt conſtat, ſi priores duo ad hos eiuſdem denominationis reuocentur $\frac{19}{8}$. $\frac{38}{8}$ & poſteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$ atque ita de cæteris.

XXI.

Similes plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero ſit ſimilis, non neceſſe eſt quælibet duo illius latera quibuſuis duobus lateribus huius eſſe proportionalia; ſed ſatis eſt, illum habere aliqua latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus laterib. huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus porportionales, ſi ſecundum ſuas vnitates in formam planam redigantur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & ſex ſimiles ſunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia ſunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera nempe 8. 3. vel 12. 2.

Eodem modo vt duo numeri ſolidi ſimiles ſint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet laterib. alterius; ſed ſufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum vnitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolidi 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

Itaq; poſſunt duo numeri plani, vel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. ſimiles, vt dictum eſt; & tamen ſi latera prioris ſumantur 3. & 8. nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in poſteriori.

Hæc porro ſimilitudo planorum, & ſolidorum reperitur quoq; in fractis numeris, ſiue in integris cum fractis. Nam ſi ſumantur quatuor numeri nō integri proportionales, & tam duo priores, quā duo poſteriores inter ſe multiplicētur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri ſimiles, &c. Dixi, plerunq;, quia fieri poteſt, vt interdū integri numeri gignantur. Nam ſi duo latera ſint $\frac{2}{3}$ *6 & alia duo* $1\frac{1}{3}$*.12 quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. poſteriora vero numerum 16.*

XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

Numerus ille cui omnes ſuæ partes ſimul ſumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales ſunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiuſmodi ſunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ ſimul ſumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ ſunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum ſumma cōſtituit ipſum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam ſummam collectas componere numerum 496. perſpicuum eſt. Qui autem numeri perfecti ſint, & qua via ac ratione procreentur, (ſunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonſtrabitur ab Euclide propoſ. vltima lib. 9.

Quod ſi partes omnes aliquotæ alicuius numeri ſimul acceptæ maiores ſint ipſo numero, dici ſolet numerus ille, Abundans: ſi vero minores, Diminutus.

Luce autem clarius ex hoc loco colligitur, partē ab Euclide ſumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus eſſet perfectus, cum ſuis ipſius partib. ſit æqualis, ſi quilibet numerus minor numeri maioris pars dici poteſt, ſiue eū metiatur, ſiue non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propoſitis adiungēda mihi videntur ex Campano, aliiſq; ſcriptoribus nonnulla alia, quibus proxime ſuccedent poſtulata, & communes animi notiones, præſertim ea, quibus in demonſtrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metitur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numer. 12. produ-

producatur. Hoc autem ita eſſe, hac ratione fiet perſpicuum. Cum numerus 4 metiatur 12. per 3. faciet 4. ipſum 12 toties compoſitus, quoties eſt vnitas in 3. Quare per deſin. 15. numerus 3 multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, vt propoſ. 16. huius lib. oſtendemus, idẽ numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifeſtum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, ſi numerus 4. multiplicet numerum 3.

[illegible] definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. *[illegible] numerum* 13 [illegible]. *per* $5\frac{3}{4}$. *quia multiplicatus per* $5\frac{3}{4}$. *gignit* $13\frac{5}{14}$.

XXIV.

Proportio numerorum eſt habitudo quædam vnius numeri ad alterum, ſecundum quod illius eſt multiplex, vel partes, parteſve; vel certe illum continet ſemel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex eſt, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, ſecundum quod illius tertia pars eſt; & ſic de reliquis.

Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cũ primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes, vt ſupra deſin. 20. docuimus.

XXV.

Termini, ſiue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores ſumi, nequeunt.

XXVI.

Cum tres numeri proportionales fuerint. Primus ad tertium, duplicatã rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecũdum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatã rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum: Et ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Hæc definitio, vt ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt deſin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

Quotlibet numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum, & ſecūdi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita ſe habere, pluribus verbis a nobis demonſtratum eſt ad defin 5. lib. 6.

Poſſunt etiam huc [illegible] tiones illæ in quinto libro tradi- [illegible] verna ratione inuerſaque; de compoſitione, diuiſione & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

Poſtuletur, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

II.

Quolibet numero ſumi poſſe maiorem.

Quamuis enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem cōtinuam vnitatum. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONUNCIATA.

I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem æque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

Qui numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IV. Quo-

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt per ipſummet numerum metitur.

Nam vnitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito vnitates, ipſum conſtituit. Quamobrem ipſũ metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis vnitatibus conſtitutum.

VI.

Omnis numerus ſeipſum metitur per vnitatem.

Cum quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Numerus enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B, & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin 15. numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A vnitates; perſpicuum eſt B. metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundẽ C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propoſ. 16 huius lib.

A.... B....
C............

VIII.

Si numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quę in metiente ſunt vnitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

Vt quia numerus 6 metitur numerũ 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18 per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc *autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6 metitur 18 per 3. fiet numerus 18, ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18 metietur per 6.*

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

quem metitur, vel ab eo multiplicetur: illum quem metitur producet.

Metiatur enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum à B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum; quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 21. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipſum C.

A . . . . B . . .
C . . . .

X.

Numerus quotcunque numeros metiens compoſitum quoque ex ipſis metitur.

Metiatur numerus A numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos; B C, C D; erit tam B C, quam C D ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo B C in partes B E, E C; ipſi A, æquales & ipſo C D, in partes C F, F G; G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F; F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

A . . . .
B . . . . E . . . . C . . . . F . . . . G . . . . D

XI.

Numerus quemcunq; numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

Metiatur numerum A. numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D, erit C D, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo C D, in partes C E, E D, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D, quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam numero E D, æqualem metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E; E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum

A . . .
B . . . .
C . . . . E . . . . D

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquũ D C. Cum enim A, metiatur &

B C

B C, & B D: erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex, aut certe B D, ipſi A, æqualis erit, Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales: erit reliquus numerus D C, vel vna pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A ipſum D C. Quod eſt propoſitum.

A . . .
B . . . . D . . . C
B . . . . D C
B . . . D C

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

Si duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

A . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H - - - -

Sint duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem G B, quæ quidem præcedentem, numerum F, D metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars ſit ipſius A E, vel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) *a* metietur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum A B, *b* Igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F: *c* Igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, *d* metietur quoque reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; *e* metietur etiam H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B. *f* Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 11. pro nun.
b 12. pro nun.
c 11. pro nun.
d 12. pro nun.
e 11. pro nun.
f 12. pro nun.

SCHOLIVM.

Conuertemus cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem quoad aſſumpta ſit vnitas.

Sint duo numeri inter ſe primi A, B CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt detrahatur & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentē, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus

A . . . . E . . G . . B
C . . . . . . F . . D

a 1. pro nun. *GB. præcedentem FD. ex BF, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD ipſum EG. a metietur quoqueGB,*
b 10 pro nun. *ipſum EG. Cum ergo GB, & ſeipſum metiatur b metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum*
c 11. pro nun. *CF. c Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſum FD, poſitus ſit metiri: metietur d quoque ipſum CD, ex CF,*
d 10. pro nun. *FD, compoſitum. At vero CD, metitur ipſum AE. e Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac pr inde cum & ipſum EB,*
e 11. pro nun. *metiatur, vt oſtenſum eſt; f metietur & ipſum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum Quare cum numerus GB, metiatur numeros*
f 10 pro nun. *AB, CD, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentē metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitū.*

Eodem modo & hoc verum eſt.

Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſq; non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractū metiatur.

Nam ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſque perueniret, eſ-
g 1. ſept. *ſent propoſiti numeri inter ſe primi. g vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.*

Ex hu facile dignoſcemus an duo quicunque numeri prop ſiti ſint inter ſe primi nec ne. Nam detracto ſemper minore de maiore. alterna quadā detractione, ſi nunquam reliquus præcedentem me-
h 1. ſep. *tiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi. h vt euclides demōſtrauit, ſi vero reliquus aliquis numerus præcedentē metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti cum ille idem reliquus numerus vtrumq e numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori huius ſcholij. Exeo enim, quod reliquus numerus GB,*

merus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, oſtenſum fuit eundem reliquum G B, vtrumque A B, & C D, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

Dentur duo numeri AB, C D, non primi inter ſe, quorũ maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatque E B, numerum, qui ex C D, ſubtractus relinquat F D, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadem detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, *a* numeri A,B, C D, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſin. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico F D, eſſe maximam menſuram communem numerorum A B, C D, Quod enim vtrunque metiatur, ita oſtendemus. Quia F D, metitur ipſum E B, & E B, ipſum C F; *b* metietur quoque F D, ipſum C F, atque adeo cum & ſeipſum metiatur, *c* metietur & totum CD, ex C F, F D, compoſitum. At C D, ipſum A E, metitur. *d* Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipſum E B; *e* metietur etiam totum A B, ex vtroque A E, E B, compoſitum. Metitur igitur F D, vtrumque numerum A B, C D.

A................E......B

C ......F .. D

G------

a 1. *ſept.*
b 11. *pro nun.*
c 10. *pro nun.*
d 11. *pro nun.*
e 10. *pro nun.*

Quod autem F D, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur vtrumque A B, C D; Et C D, metitur ipſum A E, *f* metietur quoque G, ipſum A E. *g* Igitur & reſiduum E B: At vero E B, metitur C F. *h* Metietur ergo & G, eundem C F. *i* Igitur & reſiduum F D; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam F D, numeros A B, CD, metitur. Ac proinde F D maxima eſt menſura numerorum A B, C D.

f 11. *pro nun.*
g 12. *pro nun.*
h 11. *pro nun.*
i 12. *pro nun.*

Quod ſi minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita vt detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſeipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

A ....B

C ......D

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, numerum metiẽtem duos numeros metiri quoq; maximam eorundem communem menſuram.

Hoc elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademq; ratio eſt de cæteris.

SCHOLIVM.

Ex iis quæ dicta ſunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet nũeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres nũeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. . . docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem propter numeros A, & B, inter ſe primos.

A ....
B ....
C .....

a 2. ſep. *Si vero A, & B, fuerint inter ſe cõpoſiti a ſit eorum maxima menſura cõmunis inuẽta D, quæ ſi metiatur & numerũ C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos. cum habeant numer. D, communem menſuram.*

A ....
B ....
C ....
D ...

Quod ſi D maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter ſe primi vel non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram; metietur eiuſmodi communis menſura numerũ D, maximam menſuram numerorum A, & B, per coroll. huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerũ C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſin.

A ....
B ......
C .....
D ...

Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti. b *Inuenta enim numerorum C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B;* c *metietur quoque E, eoſdem A, & B.*

b 2. ſep.

A ....
B ....
C ......
D .... E ..

c 11. pronun. *Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.*

Simili arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in qua-

quatuor,&c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. iij.

Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

Dentur tres numeri A,B,C,nõ primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C, Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A,B,C, metietur idem, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si vero D, non metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A,B,C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunq; illorum menſura communis, per coroll. propoſ. 2 huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti *a* Sit eorum maxima menſura E. Dico E. eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum A,B,C. Quod enim ſit eorum menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipſos A, & B, *b* metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A,B,C, metietur.

a 2. ſep.

b 1. pron. num.

A . . . .
B . . . . D . . . .
C . . . . . . E . . F - - - -

Quod autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quam E, eorum menſura communis, Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, &, C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A,B,C, metitur; atque adeo E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc perſpicuum eſt, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem menſuram.

Hoc etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A,B,C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem. Eademq; in cæteris eſt ratio.

Pari ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter ſe maxima eorum communis menſura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum, ſi quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

iiij.

THEOR. 2 PROPOS. 4.

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

Sint duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B. Sint enim primum

A ....

B ....

A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B; perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.

A .....

b3. defi. B ....

Sint deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe compoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtum eſt A, partem eſſe numeri B, ex defin 3. huius lib.

a2. ſep.

A .. D .. E .. F

B ....

C ..

SED iam A, non metiatur ipſum B, *a* inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. *b* Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque AD, pars eiuſdem B: ſimiliter & DE, & EF; ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A, F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

v.

THEOR. 3 PROPOS. 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterq; vtriuſq; ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A, eadem pars numeri BC, quæ eſt numerus D, numeri EF, Dico vtrumque numerum A, & D, ſimul vtriuſque numeri BC, & EF, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt

A ...... D ....

B ...... G ...... C | E .... H .... F

vel A, ipſius BC, vel D, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo

tudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars eſt A, ipſius B C, quæ D, ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & E H; erũt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorũ A, & D, toties aggregatis partium numerorum B C, & E F, æqualis erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterq; A, & D, ſimul vtriuſq; B C, & E F ſimul, quæ eſt A, ipſius B C, vel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendũ.

SCHOLIVM.

Idem hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſq; B C, E F, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius B C: ſi nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G, G C; E H, H F, ipſis A, D, æquales, &c.

$A, \frac{2}{9}$ $D, \frac{3}{7}$

$B, \frac{2}{9}\ G, \frac{2}{9}\ C,$ $E, \frac{3}{7}\ H, \frac{3}{7}\ F$

Quod ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quod numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$ ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4 &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$ $\frac{15}{27}$ $\frac{20}{36}$ quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$ $\frac{5}{18}$. ſecunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$.

Rurſus quando adſunt integri, reuocandi prius erunt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodẽ modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$ ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem $\frac{31}{7}$. deinde vtrumq; eius numerũ per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$ cuius tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in ſequentibus quoq; propoſitionibus obſeruanda ſunt, quæ de fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoq; ſunt numeri integri cum fractis. Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

Eodem modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas,

nitas, vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perſpicue in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A.	H	A.	D. . .
B. G. C	*E. H. F*	*B. G. C*	*E. . . H. . . F*

Poſſumus etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros tranſferre, hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Sint numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omnium numerorũ DE, FG, HI, ſimul eandẽ eſſe

A. . . .	B. . . .	C. .
D. . . K. . . E	*F. . L. . . G*	*H. . M. . I*

partem, quæ eſt A, ipſius DE. Diuiſis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tam numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM, erunt quoque A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erunt A, B, C, ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, ſimul ipſorum DE, FG, HI, ſimul quæ A, ipſius DE.

Idem ſequitur, ſi loco vnius numerorum A, B, C, ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A.	B. .	C. . .	A.	B.	C.
D.K.E.	*F. . L. . G*	*H. . M. . . I*	*D.K E*	*F. L. . G.*	*H. M I*

Hæc etiam fractis numeris conueniunt. Nam ſi quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonſtrabitur; etiamſi aliqui numerorum ſint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1

A, 1. | B $\frac{1}{2}$ | C, $\frac{3}{4}$
D 1 *K* 1 *E* | *F* $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ *G* | H $\frac{3}{4}$ *M* $\frac{3}{4}$ *I*

Theorema ti quoque primo quinti lib ſimile proponemus, in hunc modum.

Si ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices; quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

Demonſtratio eadem hic eſt, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æquè multiplices, ſinguli ſingulorum. Dico & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quã eſt A, multiplex ipſius D. Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quam eſt B, ipſius E, & C, ipſius F, erit è contrario D, eadem pars ipſius A, quæ E, ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A B C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

A . . . . B . . . . . . C . . . .
D . . . . E . . . F . .

Si numeri A, B, C. fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æque multiplices; quam multiplex eſt vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

Quod ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates; theorema eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

A . . B . . . . C . . . . . . | A . . B . . C . .
D . E . . F . . . | D . E . F .

THEOR. 4. PROPOS. 6. [VI]

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Dico vtrumque numerum A B, & D E, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt A B, ipſius C, vel D E, ipſius F. Diuiſis enim numeris A B, D E, in partes

A . . . G . . . B | D . . . . H . . . . E
C . . . . | F . . . .

tes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partiũ in numero D E; propterea quod eædem partes eſt numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt A G, numeri C, eadem eſt D H, numeri F; a erit vterque A G, D H, ſimul eadem pars vtriusq; C, F, ſimul, quæ A G, ipſius C, vel D H, ipſius F. Eadẽ ratione erit vterq; G B, H E, ſimul eadem pars vtriuſq; C, F, ſimul, quæ G B, ipſius C, vel H E, ipſius F: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum C, F, ſimul, quæ pars eſt A G, ipſius C; quot partes eædem eſt numerus A B, ipſius C, vel D E, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus A B, D E, ſimul vtriuſq; numeri C, F, ſimul, quæ A B, ipſius C, vel D E, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 5. ſept.

SCHOLIVM.

Eadem hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, vna cum demonſtratione; vt hoc exemplum demonſtrat.

A, $\frac{1}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ B   *D, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ E*
C, $\frac{1}{7}$ *F, $\frac{6}{7}$*

Sed & hanc propoſitionem ad quotcunq; numeros ſiue integros, ſiue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

Eadem enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus, in ſcholio præcedenti; vt hic perſpicuum eſt.

A . . K . . B	*C . . . L . . . D*	*E . . . . M . . . . F*
G	*H . . . .*	*I . . . .*

THEOR. 5. PROPOS. 7.

vij.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati; Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

Sit numerus A B, eadem pars num. C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquum E B, eandem eſſe partem reliqui F D, quæ eſt totus A B, totius C D. Ponatur enim E B, numeri G C, eadem

eadem pars, quæ eſt AE, ipſius CF, vel totus AB, totius CD.

A . . . E . . B
G . . . . C . . . . F . . . . D

Quia igitur AE, eadem eſt pars ipſius CF, quæ EB, ipſius GC: a erit vterque AE, EB, ſimul eadem pars vtriuſque ſimul CF, GC, quæ AE, ipſius CF, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem ſit pars vtriuſque numeri FG CD, erunt ipſi numeri FG, CD, inter ſe æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD, Eadem igitur pars erit EB, ipſius FD, quæ ipſius GC, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD, Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendum. a 5. ſep.

SCHOLIVM.

A, ^{3} E, $\frac{2}{5}$ B,
G, $\frac{4}{5}$ C, $\frac{6}{8}$ E, $\frac{4}{5}$ D

Locum etiam habet hæc propoſitio, vna cum eius demonſtratione in numeris fractis, vt hic apparet.

Idem hoc theorema verũ eſt tã in numeris integris, quam in fractis etiam ſi ablata ſit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel denique in integris & ablata, & reliqua ſit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A . E . . . B | A . . . E . B | A . E . B.
G . | . | . | . . . C . . F . . . . D | G | . . C | . . . . . F . . D | G . . C . . F . . D

Cæterum & ex his theoremati quinto lib. 5. ſimile hoc demonſtrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

Quod quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus AB, *totius* CD, *æque multiplex, atque ablatus* AE, *ablati* CF. Dico & *reliquum* EB, *reliqui* FD, *ita eſſe multiplicem, vt eſt totus* AB, *totius* CD. *Cum enim* AB, *ipſius* CD, *ſit æque multiplex, atque* AE, *ipſius* CF. *erit è contrario totus* CD, *totius* AB, *eadem pars, qua ablatus* CF, *ablati* AE. b *Quare & reliquus* FD, *reliqui* EB, *eadem pars erit, qua totus* CD, *totius* AB, b 7. ſep. *Ac proinde è contrario* EB, *ita multiplex erit ipſius* FD, *vt* AB, *ipſius* CD, *eſt multiplex.*

A . . . . . . E . . . . B
C . . . F . . D

Quod ſi ex CD, *ablata fuerit vnitas* CF, *vel reliqua ſit vnitas*. FD. *vel denique in integris & ablata ſit vnitas* CF, & *alia reliqua* FD, *idem demonſtrabitur. vt hæc exempla commonſtrant.*

A . . . E . . . . . | A . . . . E . . B | A . . . . E . . . . B
C . F . . D | C . . F . D . | C . F . D

viij.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati. Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

Sit numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E ablati C F, Dico reliquum E B, eaſdem eſſe partes reliqui F D, quæ totus A B, eſt totius C D, Sumpto enim numero G H, æquali ipſi A B, erit G H, eædem partes ipſius C D, quæ A B, eiuſdem C D, hoc eſt, que A E, ipſius G F Diuiſo ergo G H, in partes G I, I H, numeri G D; & A E, in partes A K, K E, numeri C F, erit multitudo partium G I, I H, multitudini partium A K, K, E, æqualis, eademque pars tam G I, quam I H, ipſius C D, quæ tam A K, quam K E, ipſius C F cum ergo C D numerus maior ſit numero C F, erit & tam G I, quam I H, pars ipſius C D, maior tam numero A K, quam K E, parte ipſius G F. Sumptis igitur numeris G L, I M, æqualibus ipſis A K, K E, erit G L, eadem pars ipſius C F, quæ A K, eiuſdem C F, hoc eſt, quæ G I, ipſius C D; Ac proinde cum totus G L, totius C D, ſit eadem pars, quæ ablatus G L, ablati C F, a erit & reliquus L I, reliqui F D, eadẽ pars, quæ totus G I, totius C D. Eodemq; argumento oſtendemus M H, eandẽ eſſe partem ipſius F D, quæ eſt totus G I, vel I H, totius C D, Quoniam ergo tam G I, quam I H, eadem eſt pars ipſius C D, quæ eſt tam L I quam M H, ipſius F D; erit vterque G I. I H. ſimul eædem partes ipſius C D, quæ vterque L I, M H ipſius F D Eſt autem G H, eædem partes ipſius C D, quæ A B, eiuſdem C D, propter æqualitatem numerorum A B, G H, Igitur & vterque L I, M H, ſimul eædem partes erit ipſius F D, quæ A B, ipſius C D. Quia vero ſi ab æqualibus A B, G H, æquales auferantur A K, K E, & G L, I M, reliqui E B, & L I M H, ſimul æquales ſunt; Erit quoque E B, reliquus eædem partes reliqui F D, quæ A B, totus totius C D, nimirum eædem quæ vterque L I, M H, ſimul erat eiuſdem F D. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & c. Quod erat oſtendendum.

A . . . . . . K . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . .
G . . . . . . L . . I . . . . . . M . . H

a 7. ſep.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{19}$ K, $\frac{2}{19}$ E, $\frac{6}{19}$ B
C, $\frac{6}{19}$ F, $\frac{6}{19}$ D
F, $\frac{2}{19}$ L, $\frac{3}{19}$ I, $\frac{2}{19}$ M, $\frac{3}{19}$ H

In numeris fractis eadem hæc propoſitio eodem prorſus modo demonſtrabitur, vt hic manifeſtum eſt.

Non

Non demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia nō conſtabit hic reliquum numerum E B, alicuius numeri eaſdem eſſe partes, quæ eſt numerus A E, numeri C F, ibi vero perſpicuum erat reliquum E B, alicuius numeri eandē eſſe partem, quæ eſt A E, ipſius C F *Licet enim ipſius E B, duplum aſſumere, triplum, quadruplum &c donec* E B, *ſit ita ſubmultiplex numeri aſſumpti* G C, *vt* A E, *eſt ſubmultiplex ipſius* C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9 ix.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, ſintque A, B, C, minores ipſis D, E F, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D, qualis eſt, aut quales B C, ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia vero B G, G C, inter ſe ſunt æquales,

A....
B....G....C
D.....
E......H......F

& minores quam E H, H F, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur; Erit B G, ipſius E H eadem pars, aut partes, quæ G C, ipſius H F, a ac propterea & vterque B G, G C, ſimul, nimirum B C, ſecundus vtriuſque E H, H F, ſimul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipſius E H, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij, Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat. a 5. vel 6. ſept.

SCHOLIVM.

In numeris fractis propoſitio hæc, vna cum ipſius demonſtratione locum etiam habet, vt hic perſpicuum eſt.

A, $\frac{3}{11}$
B, $\frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
D, $\frac{14}{22}$
E, $\frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

Quod ſi loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars ſit, quæ alter numerus alterius: Erit viciſſim vnitas tertij numeri eadē pars, quæ ſecundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, ſi loco partium aſſumamus partem in demonſtratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A.
B.G.C
D.....
E......H......F

THEOR. 8. PROPOS. 10.

x. **Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.**

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F, ſintque A, B, C, ipſis D E, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum A B, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri D E, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris A B, D E, in partes

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

A G, G B, & D, H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipſius C, quæ tam D H, quam H E, ipſius F. *a* Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes A G, ipſius D H, & G, B, ipſius H E. quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes A G, ipſius D H, quæ G B, ipſius H E. *b* Igitur & vterque A G, G B, ſimul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes vtriuſque, D H, H E, ſimul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipſius D H. hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 9. ſep.
b 5. vel 6. ſep.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ *G*, $\frac{2}{15}$ *B*,
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ *H*, $\frac{3}{10}$ *E*
F, $\frac{9}{10}$

Numeris fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

THEOR. 9 PROPOS. 11.

xij. **Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.**

Sit vt totus numerus A, B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, eſſe, vt eſt totus A B, ad totum C D. Cum enim ſit, vt AB, ad C D, ita A E, ad C F; *c* erit A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum A B, ipſius C D, & A E, ipſius

A . . . . E . . . . . . B
C . . . . . . F . . . D

c 20 deſin.

ipſius C F, æque multiplex. Quo poſito, erit è contrario C D, totus totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipſorum C D, C F. *a* Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea è contrario A B, ipſius C D, & E B, ipſius F D, æque multiplex erit, *b* Quare erit, vt totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. a 7. *ſept.* b 20 *deſin.*

A . . . E . . B
C . . . . . . F . . . . D
A . . . . E . . B
C . . . . . . F . . . D

Sit deinde A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, eadem pars, vel eædem partes. Quo poſito *c* erit & reliquus E B, reliqui F D, eadem pars, vel partes, quæ totus A B, totius C D; *d* Ac proinde erit vt totus A B, ad totum CD, ita E B, reliquus ad reliquum F D. c 7. *vel* 8. *ſept.* d 20. *deſin.*

Contineat tertio A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, eandemq; inſuper illius partem, vel partes. Quo poſito, erit è contrario C D, totus totius A B, eædem partes, quæ ablatus C F, ablati A E, vt mox demonſtrabimus. *e* Reliquus igitur F D, reliqui e 8. *ſept.*

A . . . . . . E . . . B | A . . . . E . . . . B
C . . . F . . D | C . . . . . . F . . . . D

E B, eædem quoque partes erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea è contrario A B, ipſum C D, & E B, ipſum F D, æqualiter continebit, eandemq; inſuper illius partem, vel partes, vt mox oſtendemus. *f* Quare erit, vt totus A B, ad totum CD, ita E B, reliquus ad reliquum F D. f 8. *ſept.*

Quod ſi A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F; perſpicuum eſt reliquum E B, quoq; eſſe æqualem reliquo F D. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur, quę remanent, ſunt æqualia. Itaq; ſi fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

Eodem modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertij caſus demonſtrationis reſpondent.

A, $\frac{8}{9}$ E, $\frac{7}{90}$ B | A, $\frac{14}{21}$ E, $\frac{28}{29}$ B
C, $\frac{1}{5}$ F $\frac{2}{10}$ C | C, $\frac{5}{21}$ F $\frac{10}{29}$ D

LEMMA.

Quod autem, ſi A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqua-

liter contineat, eademque inſuper partem illius vel partes; è contrario C D, ipſius A B, & C F, ipſius A E, ſit eadem partes: Et ſi C D, ipſius A B, & C F, ipſius A E, ſit eadem partes; è contrario A B, ipſum C D, & A E ipſum C F, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonſtrabimus.

A . . N . . O . . G . . B
C . . I . . K . . D
A . . . P . . . Q . . . H . . . E
C . . . L . . . M . . . F

Contineat primum A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, nimirum ſemel vel bis, vel ter, &c eandemque inſuper partem G B, quidem ipſius C D, & H E, ipſius C F ita vt numeri reliqui A G, A H, ſint vel æquales ipſis C D, C F, vel eorum æque multiplices. Diuiſis igitur numeris C D. C F, in partes C I, I K, K D; & C L, L M, M F ipſis G B, H E, æquales; erit multitudo partium numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipſius C D, ſit eadem pars quæ H E, ipſius C F. Similiter diuiſis numeris A G. A H, in partes A N, N O, O G; & A P, P Q, Q H, eiſdem G B, H E, æquales; erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis. Cum enim A G, A H, vel æquales ſint ipſis C D, C F, vel eorum æque multiplices, erunt vel tot partes in A G, A H, quot in C D C F, vel certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; propterea q; multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atq; adeo vna pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ vna pars numeri C F, eſt numeri A E. Quare cum multitudo partium numeri C D, æqualis ſit multitudini partium numeri C F, erit C D, eadem partes numeri A B, quæ C F, ipſius A E.

Contineat deinde A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, videlicet ſemel, bis, ter, quaterve, &c. eaſdemque inſuper partes illius; numerus quidem A B, partes G B, numeri C D, & numerus A E, partes H E, numeri C F: ita vt reliqui numeri A G, A H, ſint rurſum vel æquales ipſis C D, C E, vel eorum æque multi-

plices

plices, Diuiſis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD CF, erit multitudo partiū ipſius GB, multitudini partium ipſius HE, æqualis. Simili modo, diuiſis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD,

A . . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

& CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipſius CD, multitudini partium ipſius CF, æqualis propterea quod quælibet partium numeri GB, eadem pars eſt numeri CD quæ vnaquæq; partium numeri HE, eſt numeri CF. Denique diuiſis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eiſdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipſius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipſius CF, in AH, proptereaq; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF, erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE; Quod eſt primo propoſitum.

Iam vero ſit CD, ipſius AB, & CF, ipſius, AE, eædem partes. Dico è contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continere, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Diuiſis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt ea multitudine inter ſe æquales. Item diuiſis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter ſe æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, ſupereritque eadem pars, vel partes ipſius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AB, & quæ pars, aut partes ipſius CF, ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineat æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum CD, CF, multitudines æquales. Quamobrem AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemq; inſuper illius partem vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Si ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunq; numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc eſt: vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico eſſe quoq; omnes A, C, E ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, vt eſt A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniã igitur, propter eandẽ proportionem,

A . . . . C . . E . . .
B . . . . . . D . . . . F . . . . . .

a 20. *defin.* *a* eadem pars eſt, aut partes, A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F, *b* erit quoque vterque A, C, ſimul vtriuſque B, D, ſimul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia vterque A, C, ſimul, tanquam vnus, vtriuſque B, D, ſimul, tanquam vnius, eadem pars eſt, aut partes, quæ E, ipſius F; *c* erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, ſimul amborum B, D, tanquam vnius, & F, ſimul eadem pars, vel partes, quæ A, ipſius B. *d* Quare eadem porportio eſt omnium A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

b 5. *vel* 6. *ſept.*

c 5. *ſept.*

d 20. *defin.*

Sint deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorũ B, D, F. Quo poſito, erit è contrario B, ipſius A, eadem pars, quæ D, ipſius C, & F, ipſius E; Atque adeo vt prius, *e* erunt omnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. *f* Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem

A . . . . C . . . . E . . . . . .
B . . . . D . . F . . .

e 5. *ſept.*

f 20. *defin.*

ſemper demonſtratio, vt hic apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A... C...... E......... | A... C ... E...... | A.. C... E..
B. D.. F... | D. D. F.. | B. D. F.

Sint tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. a Quia igitur propter eandem proportionē, A, ipſum B, & C: ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemq; inſuper partem, vel partes; Erit per lemma præcedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, b erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ ipſius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemq; inſuper partem, vel partes. c Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B. a 20. defin. b 6. ſept. c 20. defin.

A........ C.... E..........
B...... D... F........

Sint quarto & vltimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales, E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnib. B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunq; numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C.... E.....
B.... D.... F....

SCHOLIVM.

In numeris quoq; fractis propoſitio hæc vera eſt, eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

Si quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt. xiv.

Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſſim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadē pars vel partes. d Viciſſim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: e ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D. d 9. vel 10. ſept. e 20. defin.

A.... C......
B.... D.........

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam

quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars vel partes. *a* Viciſſim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, vel partes: Atq; adeo è contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit, vel certe per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemq; inſuper partem, vel partes. *b* Quare erit vt A, ad C, ita B ad D.

a 9. vel 10. ſept.

A . . . . . . C . . .
A . . . . D . . . .

b 20. deſin.

Sint tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C, quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemq; inſuper partem vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certe per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. *c* Viciſſim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit vel partes. *d* Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C . . . .
B . . . D . . . . . .

c 9. vel 10. ſept.

d 20. deſin.

Sint quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo, è contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certe per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. *e* Viciſſim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. *f* Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . . .
B . . . . . . D . . .

e 9. vel 10. ſept.

f 20. deſin.

Sint quinto A, & C, ipſis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; *g* Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C . . . .
B . . . D . . . .

g 20. deſin.

Sint ſexto A, & C, ipſis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices ſunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque inſuper partem, vel partes; *h* erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . . .
B . . . . D . . .

h 20. deſin.

Sint ſeptimo ac vltimo A, & C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores

iores ſint quam B, & D, ſiue minores, ſiue æquales. Quoniam 20. deſin.
igitur, ob eandem proportionem A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca ſi quatuor numeri proportionales ſint, viciſſim & proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . C . . . .
B . . . D . . .

SCHOLIVM.

Quod ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

Manifeſtum quoq; eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

Coacti vero ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eoſq; demonſtrationibus certiſſimis confirmare, vna cum lemmate propoſ. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat oſtēdunt in proportionib. rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, vt perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; nam ſi maiorem numerũ minoris numeri partes eſſe dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20 Solis luce clarius cōſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

XV.

Si ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Sint

Sint quotcunque numeri *A*, B, *C*, & alij totidem D, E, F, ſitque vt *A*, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt *A*, ad *C*, ita D, ad F. Quoniam enim eſt, vt *A*, ad B, ita D, ad E; a erit viciſſim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob cauſam, cum ſit, vt B, ad *C*; ita E, ad F; erit viciſſim, vt B, ad E, ita *C*, ad F. Igitur erit vt *A*, ad D, ita *C*, ad F; (Cum enim vtraque proportio *A*, ad D, & *C*, ad F, eadem ſit proportioni B, ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, vt mox oſtendetur.) b ac proinde viciſſim, vt *A*, ad *C*, ita D, ad F.

a 13. ſep.

b 13. ſep.

A .... D ....
B .... E ......
C ... F ...
G .... H ....

Quod ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam quemadmodum *C*, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe vt *A*, ad G, ita D, ad H Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri *A*, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

A . D ...
B .. *E* ......
C ... *F* ....
G . *G* ...

Idem verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

LEMMA.

Quod autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem ſunt inter ſe quoque eadem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eadem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri ſiue fracti, ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F,

A .... B .... C ...
D .... E ...... F ...

æque

æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes, a Quare numeri A, D, C, F, proportionales ſunt. vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum. a 20 def. fin.

Hoc idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xvj.

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

Metiatur vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum E F, æque. Dico viciſſim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum E F, æque metiri. Diuiſo enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æque vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipſum E I, atque vnitas G H, ipſum I K, & vnitas H C, ipſum K F; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, ſimul numerorum E I, I K, K F, ſimul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compoſitus numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compoſitum æque metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

Illud idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris propterea quod vnitas nõ eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æque metitur, atque numerus D, numerum E F, erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A eadem pars numeri D, quæ numerus

B C, nu-

B C numeri E F; ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

Hæc propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nam ſi vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur viciſſim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur

a13.ſep. *& ſecundus integer quartum fractum; a ſed ſolũ eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quã ſecundus ad quartũ.*

THEOR. 14 PROPOS. 16

Si duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

	E.	
A...	B....	
D...........	C...........	

Duo numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim vnitate *E*; cum A, ipſum B, multiplicans faciat *C*; *b* erit *C*, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, vnitates; atque adeo vnitas *E*, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. *c* Viciſſim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A, facit D: *d* erit D, ex A, toties compoſitus, quot ſunt in B, vnitates; atque adeo vnitas *E*, numerũ B, & numerus A numerum *D*, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas *E*, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Æque igitur numerus A, vtrumque numerum C, & *D*, metietur; Ac proinde C, & *D*, inter ſe æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo ſeſe multiplicantes, fecerint aliquos, & c. Quod demonſtrandum erat.

b35. deſin.

c15. ſep.

d15. deſin.

SCHOLIVM.

In numeris fractis hæc propoſitio ita demonſtranda eſt. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E vnitatem, ex deſin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadẽ deſin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque eſt D, ad A, quod E multiplicans A facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propoſ. 14. ac proinde æquales inter ſe erunt C, & D. Quod erat oſtendendum.

	E.
A, $\frac{2}{3}$.	B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$.	C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST *hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.*

Si duo

Si duo numeri ſe mutuo multiplicauerint; procreabitur vnus idemque numerus.

Multiplicet enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipſum B faciat C, oſtendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet, a etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A; quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque vnitas E ipſum B. a 15. defin.

E.
A ... B ....
C ....

Quod ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quã multiplicati.

Numerus enim A multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F; b erit D, ex B, compoſitus toties, quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit, c Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad d, & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod oſtendendum erat. b 15. defin. c 20. defin. d 13. ſept.

F.
A ...
B .. C ...
D ..... E ....

SCHOLIVM.

Si numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem oſtendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propoſ. 14. vt D, ad B, ita E ad C, Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

Theor.

xix.

THEOR. 16. PROPPS 18.

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geneti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; a fiet quoque idem D, ex C, in, A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipſos A, & B, facit D, & E; b erit, vt A, ad B, ita D, ad E.

a 16. ſep.

A.... B....

C...

D...........E...............

b 17. ſe.

Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Liquido conſtat eandem hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari, ſi numeri A, B, G, *ſint fracti, vel unus eorum, vel duo.*

Hanc autem propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, ſiue numeri omnes ſint integri, ſiue non hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunq; numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, *ex* A, *in B*, C, D, *vel ex* B, C, D, *in* A. *Dico eaſdem rationes habere numeros productos* E, F, G, *quas numeri multiplicantes, vel multiplicati*, B, C, D, *habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad* G, *ita* E, *ad* F; *& vt* G, *ad D. ita* F, *ad* G. *Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant* E, F, *c erit vt B, ad C. ita E, ad F. Similiter quia ex* A, *in* C, D, *vel ex* C D, *in* A, *fiunt* F, G; *erit quoque vt* G, *ad* D. *ita* F, *ad* G, *Atque ita de cæteris.*

A...

B.. C... D....

E.....F.........G............

c 17. ſep.

18. ſep.

xix.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

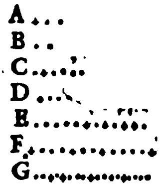
Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & quarto fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

Sint

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; *a* erit, vt C, ad D, hoc eſt, vt A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *b* erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propoſ. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videl. quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. ſcripſimus.

a 17. ſep.

b 18. ſep.



SED iam ſit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; *c* erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, æqualẽ. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *d* erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eandem F. Quare proportiones A, ad B, & C, per lemma propoſ. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

c 17. ſep.

d 18. ſep.

SCHOLIVM.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſ. locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

ITA enim oſtenſum eſt numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F; qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

SED & ſequens theorema tam in fractis numeris, quam in integris facile ex hac propoſ. 16 demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi,

qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum.

Sit primum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quam C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum eſſe maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus, ſiue integer cũ fracto: qui quidẽ reperietur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus, ſi numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D,) erit quoq; maior proportio A, ad B, quam E, ad B, ac proinde A, maior erit, quam E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quam ex E, in eundem D:

A . . . . E . . . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . . . . .

a 19. ſep. *a At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quam numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.*

Fiat deinde maior numerus ex A, in D, quam ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum quam C, tertij ad D, quartum. Si namq; intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat qui ex B, in C; (ſiue E, numerus ſit integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quam ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quam E. Quare
b 19. ſep. *maior erit proportio A, ad B, quam E, ad B; b At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quam C ad D. Quod eſt propoſitum.*

Quod ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit numero: Et ſi qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam oſtendi poteſt. Quoniam maior eſt proportio A, ad B, quam C, ad D: hoc eſt, maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſiue ex B, in C, quam ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A, in D. vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C. quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B, in C; hoc eſt, maior ex B, in C, ſiue ex C, in B, quam ex A, in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam eſt demonſtratum

A . . . . . E . . . . .
B . . . .
C . . .
D . .

ſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A. ad B. quam C, ad D. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 18 PROPOS. 20 xxi

SI tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erũt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, Ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur.

Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C, numeruſque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur.

A........
B...... D......
C....

Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, *a* erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur. a 19. ſept.

Sed iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B. in D, æqualis erit ei, qui fit ex B. in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, *b* erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat. b 16. ſept.

SCHOLIVM.

Demonſtratio hæc non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

Quod ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: maior erit proportio primi ad ſecundum, quã ſecundi ad tertium.

Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundũ,	*A........* *B...... D......* *C.....*	*A....* *B...... D......* *C.......*

quam ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundum

dum, quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedẽtis propoſ. liquet ſi ſecun o numero ſumatur alius æqualis, vt habeant r quatuor numeri. T nc enim erit maior proportio primi ad ſecundũ quã tertii ad quartum, aut minor, &c vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi nume i ſint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. ## THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium ea dem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri A B, C D minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt ſit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F Dico A B, C D, æque metiri ipſos E, F, maiorem quidem A B, ipſum maiorem E, at minorem C D, ipſum minorem F: hoc eſt, antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem, ipſum conſequentem. Cum enim ſit, vt A B, ad C D, ita E, ad F; *a* erit viciſſim, vt A B, ad E, ita C D, ad F, Atque adeo cum A B, C D, minores ſint, quam E, F; *b* erit A B, ipſius E, & C D, ipſius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, A B, CD, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipſius E, & C H, ipſius F, eadem pars. *c* Erit ergo, vt A G, ad E, ita C H, ad F; *d* & viciſſim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod eſt abſurdum; cum A B, C D, in ſuá proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipſius E, & C D, ipſius E, & C D, ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

A... G .. B
C.. H . D
E.........
F......

a 13. ſep.
b 20. de fin.
c 20. de fin.
d 13. ſep.

SCOLIVM

IDEM hoc verum eſt, ſi q u dicat, tres numeros eſſe continue proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito oſtendetur e dem modo, primum metiri ſecundum, & ſecundum tertium, vt in hoc appoſito exemplo apparet, vbi tertius numerus ſecundo æqualis eſt. Quamuis autem dari non poſſint tres numeri continue proportionales, quorũ duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit vnitas; idem

A .. G .. B
C ... H .. D
E.....
F...........

ras idem tamen demonſtratur in tribus, etiam ſi e primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12 lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9 P. 4 R I ratione, & hoc verũ eſt. quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit proportio AB, ad

A...K...B C..L..D E....M...F

G............ H....... I...............

CD, quæ, CD, ad EF, ſiue non; ita vt non poſſint reperiri alij numeri ipſis AB, CD, EF, minores quorum primus ad ſecundum ſit, vt AB, ad CD & ſecundus ad tertium, vt CD, ad EF. &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB ad CD. in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD. quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſũ in minoribus numeris proportio quidem 16. ad 20 in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25 in 4. & 5. vel in 12 & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G ad H, vt AB, ad CD, & H, ad I, vt CD ad EF Dico AB ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, metiri æquè. Cum enim ſit vt AB, ad CD, ita G, ad H, a erit viciſſim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum ſit vt CD, ad EF, ita H, ad I, b erit quoque viciſſim, vt CD. ad H, ita a13. ſep.
EF, ad I. c Quare AB, ipſius G, & CD ipſius H, & EF, ipſius I, erit b13. ſep.
vel eadem pars, vel eædem partes. Partes. quidem nequaquam Di c20. def.
uiſis enim, ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CLD. ſin.
EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipſius G, & CL. ipſius H, eadem
pars, d Erit ergo vt AK. ad G, ita CL, ad H e & viciſſim vt AK d20. def.
ad CL, ita G, ad H vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ſin.
ad FN, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL e13. ſep.

EM, in proportionibus numerorum AB, CD. EF, & minores quam AB, CD, EF, Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I. aque metietur. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionũ; ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem hebeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F, aque metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, aque metientur ipſos D, E, eademque ratione B, C, ipſos E, F, Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, aque metiatur, ac B, ipſum F, metientur aque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

A.. B.... C...
D..., E........F.....

CÆTERVM hac propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: propterea quod in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus aliis propoſitionibus, in quibus minimorũ numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Alia autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, aque conueniunt & integris numeris & fractis. quod ſatis eſt, ſemel hoc loco monuiſſe.

THEOR. 20. PROPOS. 22

xix. 1

SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri, A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe, vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim

A............. H...
B... D...
C....... E........
G......... F..

enim ſit vt A, ad B, ita E, ad F; *a* erit numerus ex A, in F, genitus æ- a 19. *ſep.*
qualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum ſit etiam vt B,
ad C, ita D, ad E, *b* erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis b 19. *ſep.*
numerus, qui fit ex C, in D. Atque ideo numerus genitus ex A, pri-
mo in F, quartum æqualis erit numero ex C, ſecundo in D, tertium,
producto. *c* Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F. c 19. *ſep.*

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, B, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtq; eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, erit rurſus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur propoſitio in numeris fractis, vt conſtat.

QVONIAM vero Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonſtrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris oſtẽdit, nimirum eum, qui à permutata proportione ſumitur, propoſ. 13 & illum, qui ex æqualitate dicitur propoſ. 14 & 22 huius lib. nõ alienũ à noſtro inſtituto erit, breuiter reliquos quatuor modos oſtendere in numeris, & alia quædam quinti libri ſequentib. theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et inuerſa ratione, ſiue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, *ita* C, *ad* D. *Dico & conuertendo, ſiue inuerſa ratione, eſſe vt* B, *ad A, ita D, ad* C. *Cum n. ſit A, ad* B, *vt* C, *ad D, d erit viciſſim A, ad* C, *vt* B, *ad D. Rurſus quia eſt* B, *ad D, vt A, ad* C, *e erit viciſſim B, ad A, vt D, ad* C. *Quod eſt propoſitum.*

A ...... C ...
B .... B ..

d 13. *ſep.*
e 13. *ſep.*

II.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoq; proportionales erunt.

SIT vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico diuidendo eſſe vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Cum enim ſit vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; a erit viciſſim, vt totus A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad ablatum F E: Ac proinde vt totus A B ad totum D E, b ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc eſt, A C, ad D F, vt C B, ad F E. c Viciſſim ergo erit quoq; A C, ad C B, vt D F, ad F E, quod eſt propoſitum.

a 13. ſep.
b 11. ſep.
c 13. ſep.

A . . . . . C . . . B
D . . . . F . . E

EADEM ratione demonſtrabimus Diuiſionem rationis cōuerſam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per diuiſionem rationis cōuerſam eſſe quoq;, vt C B, ad A C, ita F E, ad D E. Cum enim ſit, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; erit quoq; diuidendo, vt A C, ad C B ita D F, ad F E: Et conuertendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E Dico per diuiſionem rationis contrariam eſſe quoq;, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim eſt, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F; Et conuertendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.

III.

SI diuiſi numeri proportionales ſint: Hi quoq; compoſiti proportionales erunt.

SIT vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico & componendo eſſe, vt A C, ad B C, ita D F, ad E F. Cum enim ſit, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; d erit viciſſim, vt A B, ad D E, ita B C, ad E F; e Ac proinde A B, B C, ſimul ad D E, E F, ſimul, vt B C, ad E F: f Et viciſſim A B, B C, ſimul, hoc eſt, totus A C, ad B C, vt D E, E F, ſimul, hoc eſt, totus D F, ad E F. Quod eſt propoſitum.

d 13. ſep.
e 12. ſep.
f 13. ſep.

A . . . . . . B . . . G
D . . . . E . . F

SIMILITER compoſitio rationis conuerſa & contraria oſtendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis conuerſam eſſe quoq;, vt A C, ad A B; ita D F, ad D E Quia enim eſt vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit rurſus, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis contrariam eſſe quoq;, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim ſit vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo ergo, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; Et conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

IV. SI

IV.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoq; per conuerſionem rationis proportionales erunt.

SIT ut A B, *ad* C B, *ita* D E, *ad* F E. *Dico, per conuerſionem rationis eſſe quoq;, ut* A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F. *Cum enim ſit, ut* A B, *ad* C B, *ita* D E, *ad* F E; a *erit viciſſim, ut totus* A B, *ad totum* DE, *ita ablatus* C B, *ad ablatum* F E; b *Ac proinde, ut totus* A B, *ad totum* D E, *ita erit reliquus* A C, *ad reliquum* D F. c *Viciſſim igitur ut* A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F. *quod eſt propoſitum.* a 13 ſep. b 11. ſep. c 13. ſep.

A . . . . . C . . . B
D . . . . F . . E

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

SIT ut A B, *primus ad* C, *ſecundum, ita* D E, *tertius ad* F, *quartum; Item ut* B G, *quintus ad* C, *ſecundum, ita* E H, *ſextus ad* F, *quartum. Dico ita eſſe* A G, *compoſitum ex primo & quinto ad* C, *ſecundum, ut eſt* D H, *compoſitus ex tertio & ſexto, ad* F, *quartum. Cum enim ſit, ut* B G, *ad* C, *ita* E H, *ad* F; *erit conuertendo ut* C, *ad* B G, *ita* F, *ad* E H. *Quoniam igitur eſt, ut* A B, *ad* C, *ita* D E, *ad* F: *& ut* C, *ad* B G, *ita* F, *ad* E H; *erit ex aequalitate, ut* A B, *ad* B G, *ita* D E, *ad* E H. *Componẽdo igitur, ut* A G, *ad* B G; *ita* D H, *ad* E H. *Itaq; cum rurſus ſit, ut* A G, *ad* B G, *ita* D H, *ad* E H, *& ut* B G, *ad* C, *ita* E H, *ad* F; *erit ex aequalitate, ut* A G, *ad* C, *ita* D H, *ad* F. *Quod eſt propoſitum.*

A . . . . B . . G | D . . . . E . . . H
C . . . . | F . . . . .

EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebũt.

SIT vt totus A B, ad C, ita totus D E, ad F; Item vt detractus A G, ad C, ita detractus D H, ad F. Dico & reliquum G B, eſſe ad C, vt eſt reliquus H E, ad F. Cum enim ſit, vt A G, ad C, ita D H, ad F; erit conuertendo, vt C, ad A G, ita F, ad D H. Quia igitur eſt, vt A B, ad C, ita D E, ad F; & vt C, ad A G, ita F, ad D H; erit ex æqualitate vt A B, ad A G, ita D E, ad D H. Diuidendo ergo vt G B, ad A G, ita H E, ad D H. Ita ut cum rurſus ſit, vt G B, ad A G, ita H E, ad D H; & vt A G, ad C, ita D H, ad F: erit ex æqualitate, vt G B, ad C, ita H E, ad F. Quod eſt propoſitum.

A ...... G .. B D .... H ... E

C .... F ......

Item & hoc demonſtrabimus.

VII.

Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.

Sit vt primus A, ad ſecundum B C, ita tertius D, ad quartum E F; & vt primus A, ad quintum C G, ita tertius D, ad ſextum F H. Dico ita eſſe A, primum ad B G, compoſitum ex ſecundo & quinto, vt eſt D, tertius ad E H, compoſitum ex quarto & ſexto. Cum enim ſit, vt A, ad B C, ita D, ad E F; erit conuertendo vt B C, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur eſt vt B C, ad A, ita E F ad D; & vt A, ad C G, ita D, ad F H: erit ex æqualitate vt B C, ad C G, ita E F, ad F H: & componendo vt B G, ad C G ita E H, ad F H; & conuertendo, vt C G, ad B G, ita F H, ad E H. Quoniam ergo eſt, vt A, ad C G, ita D, ad F H: & vt C G, ad B G, ita F H, ad E H; erit ex æqualitate, vt A, ad B G, ita D, ad E H. Quod eſt propoſitum.

A .... D ....

B .... C .. G E ...... F .... H

Denique ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoq; illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunq; numeros proportiones habuerit, quas idem alius nume-

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoq; idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT quotcunq; numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc eſt, ſit vt AB, ad E, ita FG ad K, & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe FI, habet ad K. Cum enim ſit, vt AB, primus ad E ſecundum, ita FG, tertius ad K. quartum: Item vt BC, quintus ad E, ſecundum, ita GH, ſextus ad K. quartum; erit quoque vt AC,

A.... B...... C........ D | F.. G... H... I
E........ | K.....

primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FH, tertius cum ſexto, ad K. quartum. Rurſus quia eſt, vt AC, primus ad E, ſecundum, ita FH, tertius ad K. quartum: Item vt CD, quintus ad E ſecundum, ita HI ſextus ad K. quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FI, tertius cum ſexto, ad K quartum: Atque ita de ceteris, ſi plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunq; AB, BC, CD, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc eſt, ſit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad, HI. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad FI. Cum enim ſit, vt E, primus ad AB, ſecundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, ſextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad AC, ſecundum, ita K, tertius ad FH quartum: Item vt E primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad CD, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum ſexto. Atq; ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM vero his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinib. demonſtrata fuere, ſi pro magnitudinibus, intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti. pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati, vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti, lib. in manus ſumantur. & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

THEOR.

XXj. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B,

A.......B....
C------D--
E.---

minoreſque idcirco ipſis A, & B. Quoniam igitur C D, minimi ſunt in proportione A, & B, *a* metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque: atque adeo ſecundum eundum numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; *b* metietur & viciſſim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Ruſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur, *c* metietur quoque viciſſim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B. Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B. Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 21. ſep.
b 15. ſep.
c 15. ſep.

XXij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi menſura eos metiri. Si enim non

A.........B.....
C---
D-----E----

ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis metiaturque C; numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At vero ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B: *d* fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. *e* Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E. Atque adeò,

d 9. pron. num.
e 18. ſep.

adeo, cum D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum; Et quotcunq; numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poſſint, quamuis proportio duorũ in minorib. numeris reperiatur. Si n. non ſunt minimi, erũt aliqui alij minores ipſis, nimirum, D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionũ. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æquè, per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus: atq; adeo ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G: ita vt D, totum metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A æque metiuntur; metietur quoq; viciſſim æque vnitas numerum D & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipſum B & ipſum C, æque, atq; vnitas ipſos E, F: Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alii numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt. 21. ſept.

A . . . . . B . . . . C . . . .
D - - - - E - - - - - - F - - -
G - - - - -

IAM vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionũ minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primos, metiatur eos communi mẽſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D: & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E: & ipſum C, toties quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties cõpoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F, fit vt D, E, F, ipſum G, multiplicãtes producãt ipſos A, B, C, Quare D, E, F, eaſdem habẽt proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad pro-

ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus: Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C, Quod eſt propoſitum.

xx iiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

Sint inter ſe primi A, & B: & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C: metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipſum A: *a* metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cum habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B erit is ad A; primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... B ....
C ... D ---

a 11. pron.

xxv.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

Sit vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi: ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; *b* fit, vt F, ipſum E. multiplicans gignat ipſum D: *c* & contra E, ipſum F, multiplicās producat eundem D. Genitus eſt autem idem D. ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum, fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; *d* erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; *e* erit E, ad A, primus; Atq; adeo E, & A, cum ſint inter ſe primi, *f* in ſua proportione minimi erunt. *g* Aeque igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cum E, metiatur vtrumq; B & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A .... B ...
G ....
D ....
E .... F ....

b 9. pron.
c 16. ſep.
d 19. ſep.
e 25. ſep.
f 23. ſep.
g 21. ſep.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvi

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

Sint inter ſe primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in ſeipſum. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D, æquali ipſi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi ſunt, *a* erit numerus ex A, in D, hoc eſt, ex A, in ſe genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademq; arte oſtendemus, numerum ex B, in ſe genitum, ad A, primum eſſe. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat. *a 26. ſep.*

A.... B......
C...............
D....

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvii

Si duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumq; primi fuerint; Et qui ex eis gignētur, primi inter ſe erunt.

Sit vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter ſe primos eſſe. Cum enim vterque A, & B, primus ſit ad C; *b* erit quoq; E, ex ipſis genitus ad eundē C, primus. *b 26. ſep.* Rurſus cum vterq; A, & B, ad D, ſit primus, erit eodē modo E, ex ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus eſt ad E; *c* erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. *c 26. ſep.* Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumque, &c. Quod erat oſtendendum.

A..... B...
E...............
C.... D..
F........

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviii

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoq; primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

Sint primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cum enim A, B, inter ſe pri-

C... B..
C......... D....
E.................. F.......
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

a 27. ſeptim. mi, *a* erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter ſe erunt.

RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, *b* erit & C, factus
b 27. ſep. ex A, in ſe, ad B: & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; *c* Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cum A, & C, primi ſint ad B, *d* erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eademq; ratione & F, ad A, primus erit.

A... B..
C......... D....
c 28. ſep. E.................... F.........
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

d 26. ſeptim. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus eſt; *e* e-
e 28. ſep. rit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi
f 26. ſep. ſint ad B, *f* erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus; nec non & H,
g 28. ſep. ad A. *g* Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterq; A, G, ad vtrumq; B, H, ſit primus. Si duo itaq; numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

xxix. SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad vnum aliquẽ illorum primus fuerit; Et ſi vterq; ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi A B, B C. Dico & vtrumque ſimul A C, primum eſſe & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura nume-
a 12. pro nun. rus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A *B*; *b* metietur quoque reliquum *B* C. Non igitur primi inter ſe ſunt A *B*, *B* C, cum eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quare A C, ad A *B*, primus erit. Eodẽq; modo ad *B* C, oſtẽdemus eundem eſſe primum.

A.........*B*.....C
D-----

SED iam vterque A *B*, *B* C, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A *B*. Dico & A *B*, *B* C, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, nu-
b 10. pro nun. merus D. Quia igitur D, metitur A *B*, & *B* C; *b* metietur quoque D, numerum A C, ex A *B*, *B* C, compoſitum; Ac proinde A C, A *B*, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Sunt igitur A *B*, *B* C, inter ſe primi. Eo-

mi. Eodemque argumento oſtendemus A B B C, inter ſe primos eſſe, ſi A C, ad B C, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint. &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim A C, ad A B. primus eſt, erunt A B. B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & A C, ad B C, primus erit: per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

Primus numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A. & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . . . B . . . .
C - - -

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

Si duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus, is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

Duo numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnum ipſorum A, & B; ſi non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur vero ipſum C, toties, quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; *a* erit vt D, primus ad A, ſecundum; ita B, tertius ad E, quartum. *b* Quia vero primus D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; *c* erunt D, & A, in ſua proportione minimi. *d* Quare æque metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B. & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non

A . . . . B . . . . . .
C . . . .
D . . . E . . . .

a 19. ſep.
b 31. ſep.
c 2. ſep.
d 21. ſep.

e r. eta-

metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Eodem modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

Si duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

Nam ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoq; ad vnum ipſorum A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoq; inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterq; A, & B, ad D, primus. a Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur vel metiri ipſum C, vel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B cum non ſit primus ad vtrumq;.

a 26. ſep.

A... B....
C. ....
D. ......

xx. PROBL. 31. PROPOS. 33.

Omnem compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Sit numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si vero compoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; b metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum qui cum metiatur omnes præcedentes, c metietur quoque compoſitum A. Quod eſt propoſitum.

b 11. pron. 7.
c 11. pron. 7.

A ....
B...... C...

Aliter. Quia numerus A, compoſitus eſt, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A. d metietur quoque C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus

d 11. pron. 7.

A ....
B...   C---

rus B. Omnem igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur, Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxij

Omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

Sit numerus quicunque A. Dico eum eſſe vel primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur compoſitum: Si vero compoſitus; *a* metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metietur. Quod erat oſtendendum. *a 33. ſept.*

A.........

PROBLEM. 3. PROPOS. 35. xxxiiij

Numeris datis quotcunque reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

Sint quotcunque numeri A, B, C, habentes quaſcunq; proportiones, ſiue eadē ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt, erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi per ea quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus.

A...... B.... C........
D..
E... F.. G....
H— I—— K——
L——

Si vero nō ſunt inter ſe primi, *b* inuenta ſit maxima eorum cōmunis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A B, C, per numeros E, F, G Dico E F G, minimos eſſe in proportionib. numerorum A, B, C. Quod enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per E, F, G; *c* fit, vt D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E F G, quas numeri A, B, C. *b 3. ſept.* *c 9. pronun.*

Quod vero E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſint minimi; erunt aliqui alij ipſis minores minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H I, K; qui quoniam ipſos A. B, C, metiuntur æque, vt ad propoſ. 21. huius lib. oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, *d* fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; *e* & viciſſim L, ipſos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H; ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; *f* erit, vt E, primus ad H, ſecun- *d 9. pronun.* *e 8. pronun.* *f 19. ſept.*

dum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior, quam H. Igitur & L, maior erit, quam D: Atque adeo cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, ſed ipſi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit, maximam menſuram quorlibet numerorum metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E, F, G, per quos D, maxima menſura numerorum A, B, C, ipſos A, B, C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque eſt in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

Ex his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continuè proportionales. Vt ſi proponantur continuè proportionales A, B, C, D, E, ſiue illi ſint in continuatione proportionum A, ad B minimi, ſiue non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

problema ſumamus F, & G minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis menſura eos metitur.

Cæterum contingit interdum, vnum numerorum E, F, G, per

A... *B*...... *C*........	*A*.... *B*.. *C*......
D...	*D*..
E. *F*.. *G*...	*E*.. *F* *G*....

hanc propoſ. inuentorum eſſe vnitatem: quando ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A, B, C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inuerto: E, F, G, eſſe minimos in cõtinuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quam vnitas.

THEOR. 4. PROPOS. 36.

xxxvj. Duobus numeris datis reperire quem illi minimum metiantur, numerum.

Sit reperiendus minimus numerus omnium quod dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſeſeque mutuo multiplicans faciant C. Dico C, eſſe mini-

minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; *a* metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque ipſum A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus: metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, ad B, eundem D, per F. Quo poſito, *b* tam ex A, in F, quam ex B, in F, & è contrario producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium *c* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, ſint ponantur primi inter ſe, *d* & ob id, in ſua proportione minimi, *e* æque metientur ipſos F, & E, nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D, *f* erit C, ad D, vt B, ad E. Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt, metietur & C, numerus numerum D, major minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atq; adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

a 7. pronun.

A . . . . B . . . . .
C . . . .
D ---------------------
E -------- E ----

b 9. pronun.

c 19. ſep.

d 23. ſe.

e 21 ſep.

f 17. ſep.

Sint deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. *g* Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, *h* fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; *i* metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, *k* fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, *l* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, *m* metientur ipſos H, & G, æque, nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F, *n* erit E, ad F, vt D, ad G. Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt, metietur etiam E, numerus nume-

g 35. ſep.

A . . . . B . . . .
C . . D . . .
E . . . .
F ----------
G ---- H ----

h 19. ſep.

i 7. pron.

k 9. pronun.

l 19. ſep.

m 21. ſeptim.

n 17. ſeptim.

c 3 rum

rum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem, atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

Hoc autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

xxxv.

THEOR. 33. PROPOS. 37.

Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Metiantur duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, ſitq; alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum C D, metiri. Si enim E, ipſum C D, non metitur, ablato E, ex C D, quoties poteſt auferri, relinquetur numer⁹ quidam minor, quam E. Relinquatur igitur E, ablatus ex C D, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt,

A.. B,..
C.........., E ----D
E.....

F D, minorem ſe, ita vt E, metiatur ablatum C F. Quoniam
a 11. pronun. igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur, & E, ipſum C F; a metietur quoque tam A, quam B, ipſum C F. Itaque A, & B, cum metiantur
b 12. pronun. totum C D, & ablatum C F, b metientur & reliquum F D. Eſt autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quare E, ipſum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxxvj.

PROBL. 5. PROPOS. 38.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

c 36. ſep. Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur, c Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metian-

metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt; A B, C, aliũ numerum E, ipſo D, minorem.

A... B.... C.....
D............
E..........

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Immo, cum A, & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem ij dem A, & B, metiuntur; *a* metietur quoq; D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum. a 32 ſep.

Sed iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. *b* Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cum A. & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; *c* metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt A. B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; *d* metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B; metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipſum E, minorem quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Immo cum C, & D, metiantur ipſum F; *e* metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum. b 36. ſep. c 11. pro nun. d 37. ſeptim. e 37. ſeptim.

A.. B... C.....
D.....
E............
F ....

COROLLARIVM.

Sequitur ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A. B, C. metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

Hoc corollariũ alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib oſtendere poterimus Metiantur enim A, B, C, quem cunque numerum D E. ſitq; F. minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E. metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D C,

A . . B . . C . . . .
D . . . . G- - - E
F . . . .

relinquatq; numerum G E, ſe minorem Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur; & F ipſum D G, a metiantur quoq; A, B, C eundem DG; Atq; proinde, cum & totum DE, ponatur metiri; b metientur & reliquum G E, ipſo F, minorem. Quare F. non erit minimus quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Metitur igitur F, ipſum D E.

a 11 pro nun.
b 11. pro nun.

Pari ratione, Pluribus numeris datis, quam tribus reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur. &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum, eſt.

xxxvij.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

Si numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

Metiatur numerum A, numerus B, Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B. ipſum A, toties, quot

A . . . .
B . . . . C . . .

vnitates ſunt in numero C Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque metitur; c & viciſſim vnitas æque ipſum B, & C, ipſum A, metietur: atque adeo eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A, Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin 2. huius lib, docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numer⁹ metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

c 15. ſep.

xxxviij

THEOR. 35. PROPOS. 40.

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, á qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cum B, pars denominetur à C, ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodem,

A . . . .
B . . . C . . . .

C, denominata; metietur vnitas ipſum C & B, ipſum A. æque, d Viciſſim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, & c. Quod demonſtrandum erat.

d 15. ſep.

PROBL.

THEOR. 6. PROPOS. 41. xxxix.

Numerum reperire, qui minimus cum ſit habeat datas partes.

Sint datæ partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, ſiue quiipſas denominent, D, E, F; a minimuſque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cum D, E, F, ipſum G, metiantur, b habebit G, partes a D. E F. denominatas; hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D E F. Quod vero G, ſit minimus illas partes habens perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A B C. c metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod eſt abſurdum & contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes, Quod faciendum erat.

a 38. ſep.
b 39. ſep.
c 40. ſep.

D..	A Secunda
E...	B, Tertia
F....	C, Quarta
G............	
H------------	

SCHOLIVM.

Quod ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipſius G, denominatæ ſcilicet à D E F.

Cum enim D, E, F, ipſum G, metiantur per I, K, L; metietur æque unitas ipſos I, K, L, & numeri D E, F, ipſum G, d Viciſſim ergo metietur quoque unitas ipſos D, E, F, & numeri I K L, ipſum G æque, atque adeo unitas ipſorum D E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipſius G. Cum ergo unitas ſit pars ipſorum D, E, F, ab ipſis denominata; erunt & I K, L, ipſius G partes denominatæ à D, E, F. d 15. ſep.

A, Secunda	D..I......
B, Tertia	E...K....
C, Quarta	F....L...
	G............

Ex hic autem ſequitur, minimum numerum, quē quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G quem minimū metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cuiuſmodi ſunt I, K, L à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

Iam vero, ut Campanus ait, ſi inuentus minimus nu[illegible]

tas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur ſecundus numerus poſt minimum, tertius, quartus, &c. eaſdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, ſit illius duplus, numerus H, triplus vero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I tertium &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H neque inter H duplum, & I, triplum &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G dictas parter cõtineant. Quod enim H & I, &c. partes A, B, C, habeãt denominatas ſcil. à D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I,

G............ A, D..
H.......................... B E ...
I.................................. C, F...
K-- ----- ------ M- ----- L
N------------ ------------ P ------ O

a11. pron. & reliquos multiplices ipſius G: a metientur quoque D, E, F, eoſdem H I, & reliquos multiplices ipſius G b Quare H I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B C.

b 39. ſeptim.

Quod autem H duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius K L, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G minimus & minor quam H, duplus ipſius G Detracto autem G, ex K L relinquatur M L ipſo G minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; c metientur ipſum numeri D, E, F à partibus illis denominati; Ac propterea & G minimus quem D E F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundem K L. Metitur autem & G, ablatum K M, ſibi æqualem d Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt huiuſmodi partes habens.

c 40. ſeptim

d 12. pron.

Non aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet N O ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipſo G Quia igitur N O, partes habet A, B, C, e metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O per coroll. propoſ. 38, huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum N P, ablatum ipſi H, duplo æqualem. f Igitur & reliquum P O, idem G metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac

e 40. ſeptim.

f 12. pron.

tas; Ac propterea I, tertius eſt illas partes habens. Eadem que ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

Huc quoque referri poteſt ſequens problema.

Numerum reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

Sint datæ partes A, B, C; inueniendusq; ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt, pars A, contineat partem B, & pars B, partem C Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur.

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerũ G, à D, denominatam. Deinde quia ex E in F, fit G: erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F. donominatam, nimirum vnitatẽ Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt eaſdem partes eodem ordine, ita vt K ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata. & M ipſius L, pars C, ab F, denominata Quia igitur K pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; a Atque adeo ex D, in K fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M Itaque cum D ipſos G, & K multiplicans faciat H, & I; b erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F in vnitatem, & M fiant F, & L; erit, vt F ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F ad L: & vt F, ad L, ita vnitas ad M. Eru per ..oma

A, Secunda. B, Tertia C Quarta.
D.. E... F....
G.............
H.........................
Vnitas
I.........................
K.............
L.........
M...

H. G. F Vnitas
I. K. L. M.

a 15. defin.
b 17. ſepti.m.

pr

H, G F. Vnitas. propoſ. 14. huius lib. vt H. ad I, ita vnitas
I. K. L. M. ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toti. Quod eſt abſurdum. Nõ ergo alius numerus minor quam H, habet partes A. B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H. minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360 ex 3 in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

Quod ſi numerum H inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros videlicet ſecundum tertium quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nã G duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G. ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

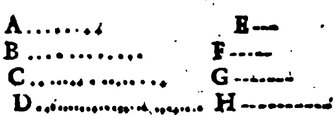
EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A. & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E F, G. H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A.B, C. D, & alij illis æquales multitu[illegible] E F, G. H, qui [illegible] ſumuntur, & in eadem ratio[illegible] ex æqualitate [illegible] A, ad D, ita E ad H: *b* S[illegible] autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter [illegible] primi eſſe ponantur. *c* Igitur tam A, ipſum E, quam D, ipſum H, æque metietur maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 14. ſep.
b 23. ſep.
c 21. ſep.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D,

eſſe

A . . . :	E - - -	
B	F - - - - - :	
C	G - - - - - -	
D . . . . :	H - - - - - - - - -	

eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſiue A, B, C, D ſint continue proportionales, vt vult Euclides, ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſa ſunt, quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

iij.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

Sint minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſeipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C, D, E, eſſe tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rurſus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; *b* erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales ſunt C D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione ſint minimi, ita demonſtrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati ſunt ex A, & B, in ſe ipſos: *c* ſunt autem A & B, inter ſe primi quod minimi ſint in ſua proportione; *d* Erunt & C, E, extremi, inter ſe primi. *e* Quare C, D, E, minimi ſunt in ratione A, ad B.

	A . .	B . . :		
C	D	E . . . . :		
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27.	
K, 16,	L, 24.	M, 36.	N, 54.	O, 81.

a 17. ſep.
b 17. ſeptim.
c 24. ſeptim.
d 29. ſep.
e 1. huius.

Iam vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos eſſe in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales ſint in ratione A ad B, ita demonſtrabimus. Quoniam A, multiplicans ipſos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propoſ. 18 lib. 7. oſtendimus numeri F, G, H, eaſdem proportiones, quas C, D, E, hoc eſt, quam habet A, ad B. Rurſus quia A, & B, ipſum E, mulplicantes, fecerunt H, & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi ſint, ita perſpicuum fiet *g* Quoniam A, & B, minimi in ſua proportione, ſunt inter ſe primi; factique ſunt C, & E, ex A, & B, in ſe ipſos; Item procreati ſunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirũ F, ex A, in

f 18. ſep.
g 24. ſep.

C, & I, ex B, in E, a erunt & F I. extremi inter ſe primi: b Quare F, G, H, I, in ſua proportione. quæ eſt A. ad B, minimi ſunt. a 29. ſep. b 1. oct.

Non aliter, ſi ex A, in quatuor inuentos F G H I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinq; numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademq; ratione inueniemus ſex, ſeptē, octo, &c Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

Eodem modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D C: & F, ex A, in C. Quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A B, multiplicantes C, ipſos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propoſ. 18. huius lib. demonſtrauimus, in eadē erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A B; quod B, multiplicans C, D, E, ipſos G H I, fecerit. Sunt ergo F G H I, in eadem ratione, in qua A B Quod vero minimi ſint, oſtendetur, vt prius. c 18. ſep.

Non aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I H, G F, fiant O N M, L; & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaque ſiue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclid. ſ. quatuor F, G, H I, produci ex A, in C D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A ·. B ·.
C ... D ...... E ....
F, 8 G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM. I.

Hinc fit, ſi tres numeri minimi ſint continue proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorū æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter: ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

Sic etiam ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum: Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub aliis denominationibus,

quæ

quæ in Algebra ſolent explicari: Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

Neque vero dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis cõtinue proportionalib. inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continue proportionalib. vtcunque propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continue proportionales æquales prorſus ſunt iis, qui per hanc propoſ. inueniuntur: Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt cõtra hanc propoſ. Si enim dati maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſime ita fiet perſpicuũ. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi cõtinue proportionales;

A --- B --- C -----

D, 2. E, 3.

F, 4. G, 6. H, 9.

ſumptiſque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſchol. propoſ. 33. lib. 7 inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione: Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G; erit quoque permutando, vt A ad F, ita B, ad G, ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B ipſi G æqualis: Eademque ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademque ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quod ſi A, dicatur minor quam F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt, quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si vero A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non ſunt, quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quam F, æqualis omnino erit, ideoque vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM II.

Perſpicuum quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

Conſtat etiam duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione: quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in F; & G, H, medii ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex

B, in F.

B. in F,G,H, vt ex demonſtratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM. II.

Quoniam vero tam numeri A,C,F,K, quam B,E,I,O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt, ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero à B, denominentur, vt clarius demõſtrabitur propoſ.9. huius lib. ſit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continue proportinaliũ ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimè continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum cõtinue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B, At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionaliũ, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrẽ ſi quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione, non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab vnitate incipiat) cõtinue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorũ, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorẽ datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſũ per denominatorem eundẽ multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate cõtinue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1.2.4.8.16.32.64.128. Nam horum vltimus 128 erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3 ad 2. vt hic patet, 128.192 288.432.648.972.1458.2187 ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademq; de reliquis eſt ratio.

Boetius autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos 5. lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderãtur 8. numeri minimi in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, quorum vltimum

denominantur à denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione ſeſquialtera, hoc eſt, à 2. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquinta, ſumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1.5.25.125 626. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet 625.750.900.1080.1296 Atque ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neque in priori exemplo poſt 1287. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demõſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

iij. PROBL. 2. PROPOS. 3.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentiũ; illorum extremi ſunt inter ſe primi.

Sint numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D.

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E, 2.	F, 3.		
G, 4.	H, 6.	I, 9.	
K. 8.	L, 12.	M, 18	N, 27.

Quoniam igitur A, B, C, D. minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometrice demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Hæc propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inueniri

ueniri non poſſent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totius minim. in eadem proportione. Imo ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, cōtinuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6.10.13.18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaq; hoc theorema primi eſt conuerſum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, ut conſtat ex 1. theor. Et viciſſim numeri extremi quotcunq; minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, veluti hic demonſtratum eſt. At vero primũ theorema, prout ſpectat ad numeros non cōtinue proportionales, conuerti nequit. Nã licet numeri quotcunq; non cōtinue proportionales, quorũ extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in cōtinuatione ſuarum proportionum, ut ex ſcholio propoſ. 1. huius lib. liquet; Tamen non ſemper è contrario, numeri extremi quotcunq; minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, ut manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6.10.13.18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. IV.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis porportionibus. a Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, ſecundus & tertius; quoties B, ipſum E, metitur, toties A, metiatur ipſum F; & quoties C, eundem E, toties ipſum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos eſſe in porportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita oſtendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipſos F, & E, hoc eſt, per eundem numerum; metiantur per H: Quo poſito, b A, & B, multiplicantes ipſum H, producent F, & E, c Quare erit, vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipſos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales ſunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi ſint, ſic manifeſtum erit. Si non ſunt minimi, erunt aliqui illis minores, ſingulis ſinguli, in eiſdem rationibus; ſint, ſi fieri poteſt, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ------ K ----- L -----

a 36. ſep.
b 9. pronun.
c 18. ſep.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ---- K ---- L ----

proportione: *a* ipſi æque metientur I & K, in eadem proportione exiſtentes, nimirum B, ipſum K, conſequens conſequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipſum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipſum K, metiantur, *b* metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non erunt igitur alij numeri minores ipſis F E G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi, F, E, G, minimi ſunt in datis rationibus.

b 37. ſep.

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendiq; ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. *c* Inuento rurſum numero G, minimo, quem metiantur B, ſecundus, & C, tertius; quoties B, ipſum G, metitur, toties metiatur A, ipſum H; & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K.

c 36. ſep.

A, 6, B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L ---- M ---- N ---- O ----

Dico H, G I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, cõſtat. Cum enim A, & B, ipſos H. & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipſos G, & I, quam E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; *d* ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur; *e* metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

d 21. ſeptim.

e 37. ſep.

Sed iam E, non metiatur ipſum I. *f* Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L; & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K,

f 36. ſep.

æque

æque metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K; Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipſos H, G: & C, D, ipſos G, I, metiantur æque.

Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita K, ad K Atque vt E ad F, ita quoque eſt K, ad N, cum E, F, æque ipſos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps

A. 9. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L 40. K, 30. N, 105.
O---- P ---- Q --- R ----

proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namq; non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, *a* ipſi ſique metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q. metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeo cum B, & C, ipſum P, metiantur, *b* metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia vero oſtenſum eſt, eſſe vt G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q: erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q Atque idcirco, cum metiatur G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q; *c* quod E, F, in ſua proportione minimi æque metiantur Q R, eiuſdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E. ipſum Q: *d* metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; proptereaque ipſi M, L, K, N minimi ſunt.

a 21. *ſep.*
b 37. *ſeptim.*
c 12. *ſeptim.*
d 37. *ſeptim.*

Quod ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N, metitur. Nam M, E, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipſum N, non metiatur, *e* ſumemus

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S. 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O, 144. Q. 120. P, 90. O, 315. V, 70.

e 36. *ſep.*

A,6 B 5. C,4. D,3. E,2. F,7 S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q.120. P,90. O,315. V,70.

O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur; toties metiatur K, ipſum P, & L, ipſum Q: &, M, ipſum R; quoties vero S eundem O, metitur, toties T, ipſum, V, metiatur; His enim peractis, erunt R Q P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis, numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequã ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens & conſequens, licet proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

Porro inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus ſi ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs quæ ad propoſ. 18. lib. 7 demonſtrauimus.

THEOR. 3. PROPOS 5.

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; poſterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E. & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuo multiplicantes numerum G

A,24. B,48.
G,18.
C,4. D,6. E,3 F.16.

Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; a erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia
a 17. ſeptim. F, multilpicans D. & E, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F.

Qua-

Quare A, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, a Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur. a 27. de fin.

Eodem argumento oſtendemus, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, b erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. c cum ergo proportio A ad B componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat. b 17. ſeptim. c 27. de fin.

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſpiam vllum metietur.

Sint continue proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proxime inſequentem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C ad D; & D, ad E: A, vero ipſum B, non metiatur, neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quod vero nec alius quiſpiam illorum vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. d Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero eſt vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. e Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; non metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium á ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtrabimus, neque d 2. octaui. e 3. octaui.

A, 16. B 24. C, 36. D, 54. E, 81
F, 4. G, 6. H, 9.

A quartum D, neque B, quartum E, metiri Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps ſproportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicē. Quod enim nullus proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D: & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neq; D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur è contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniā igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C. ad D; B, ad C, & A, ad B erit conuertendo E, ad D vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A) Et E, primus ſecundum D, non metitur; a neque alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare è cōtrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum vllius erit multiplex per ea, quæ in defin. 5. lib. 7 ſcripſimus.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

a 6. o ct.

Sed & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundem metiatur; & quicumque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuius libet ſequentium multiplex erit.

Sint deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C: & C. ipſum D: & D ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur;

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

metiatur, nempe B, *ipſos* D, & E, *hoc modo oſtendetur. Quia* B, *ipſum* C, *metitur, & C, ipſum D, a metietur quoque B, ipſum D Rurſus quia D, ipſum E, metitur, b metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.* a 11. pro nun. b 11. pro nun.

Sed iam primus A, multiplex ſit B *ſecundi.* Dico *& quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit ut A, ad B, ita* B, *ad C; & C, ad D, & D, ad E: ſit autem* A, *ipſius* B, *multiplex: erit &* B, *ipſius C, & C ipſius D, & D, ipſius* E, *multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime inſequentis multiplex eſt,*

A, 48. *B*, 24. *C*, 12. D, 6. E, 3.

Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex, metietur è contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem E, D, C, *B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, ut demonſtratum eſt. Ac propterea è contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.*

Conuertemus etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum à ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur: Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex; neq; primus ſecundi multiplex erit.

Sint deinceps proportionales A, B, CD, E, *& primus* A, *vel alius quiſque nullum à ſecundo* B, *metiatur.* Dico *neque* A, *primum metiri* B, *ſecundum. Si enim* A, *primus ſecundum* B, *dicatur metiri; metietur quoque,*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81

per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunque alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cum neque primus, neque alius quiſquam ullum à ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, *ipſum* B, *metietur.*

Iam vero A, *primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo* B, *ſit multiplex.* Dico *neque* A, *primum multiplicem eſſe* B, *ſecundi Si namque* A, *primus multiplex eſſe dicatur* B, *ſecundi, multiplex quoque erit quicunque*

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

alius cuiuslibet ſequentium, ex iis, quæ ſecundo theoremate huius ſcholii demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neq; alius quiſquam ullius à ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A *ipſius* B, *multiplex erit.*

f Theor.

vij. THEOR. 5 PROPOS. 7

Si ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

Sint deinceps proportionales A, B, C, D, E, & A, primus extremum B, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: a neque alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atq; idcirco ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 6. oct. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

Vt theorema, quod ſecundo loco in ſcholio præcedentis propoſ. demonſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc prop. hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſpiam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex, primus quoq; ſecundi multiplex erit.

Quod eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex, neq; alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 9. & 1. theoremate ſcholij præcedentis. Quod eſt contra hypotheſin.

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; ſitq; vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo vt A, ad B, atque adeo vt E, ad F, ita G, ad K. b Quare cum G, & K,

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

& K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorum numerorũ; a ac propterea in ſua proportione minimi; b æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos c Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E. L, M, F, ipſos E L, M F. producunt; in eiſdem rationibus erunt E L, M, F, in quibus G, H I, K, vt ad propoſ. 18. lib 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco cum multitudo E L, M, F, æqualis ſit multitudini A. C, D, B, tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12 F, 4.

a 23. ſep.
b 21. ſep.
c 9. propo-ſiti.

SCHOLIVM.

Non ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A. & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L M. F. quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E. L. M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M F eandem habent, quam A, C, D, B.

Eadem hæc propoſitio vera eſt, ſi existentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas exiſtentibus E, & F, numeris, vt in exemplis apparet.

Conſtat etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, nõ poſſe cadere numerum medium proportionalem: cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binariũ, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter nũeros, ſola vnitate differentes; ſuperbipartientes deniq; inter numeros, quorum differentia eſt binarius ſi inter duos numeros duplæ proportionis vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoq; per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binariũ, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes vel etiam binario, nimirũ inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent, quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neq; inter binariũ & vnitatem, neque inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtãtes interijcitur ſolũ numerus, qui ab vtro-

que vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, (ſiue C D, vnitas ſit, & A B, ternarius ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quã A B, maior vero quam C D, vnitate quoque.

A..G.B | A.....G.B
E. H.F | E.....H.F
C.D | C.....D

Dico E F, non eſſe medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur eſſe A B, ad E F, vt E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipſi E F, æquali, vt reliqua ſit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipſi C D, æquali, vt relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque vt A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cum A G. E H, ipſis E F, C D, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoq; reliquus G B, ad reliquum H F. hoc eſt, vnitas ad vnitatem, Vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo E F, medius proportionalis eſt inter A B, & C D.

Itaque inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt, quod fieri non poſſe, proxime demonſtrauimus.

Pari ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ, quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt ſit A B, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad A B. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum A B. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium A E. Igitur D, metitur totum A E, & ablatum A E. a ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem B E. Quod eſt abſurdum

A.....B.E
D.. D...
C.

a 11. pronun.

Cadat deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E: b ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem E B, metietur. Quod eſt abſurdum.

A....E.B
D....
C.

b 11. pronun.

Ex quibus fit, neque illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, octaua neq; illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt

Tonus

Tonus, ſeu vulgo, ſecunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet,) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariã diuiſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperparticularis, qualis eſt ſeſquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum, bifariã ſecari non poſſe. Vnde Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapenten, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſequitertia cõſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoq; Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur ſecari ſolet. Sed de his plura apud Muſicos reperies.

Rurſum ex his demõſtrari poteſt, proportionem diametri cuiuſuis quadrati ad latus eiuſdem numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demõſtrauimus, quadratum diametri duplum ſit quadrati ex latere deſcripti, quadratorum vero proportio ſit duplicata proportionis laterum; fit vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratũ lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam ſecet, vt oſtendimus, manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt diametrum eſſe lateri incommenſurabilem, quà de re plura ad 9. & vltimam propoſ. lib. 10. ſcribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidẽ & inter vtrumq; eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

Cadant inter numeros A B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, *a* ſumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, *a 2. octa.*
donec

A,8. C,12. D,18. B,27.
Vnitas.
1.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

donec multitudo aſſumptorum æqualis ſit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt; *a* erunt A C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex conſtructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipſis A, C, D, B, æquales ſunt ſinguli ſingulis, vt K, ipſi A, & N, ipſi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. E, ſeipſum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipſum G, fecit K, *b* metietur E, ipſum G, per E, & G, ipſum K, per eundem E: *c* Metitur autem & vnitas ipſum E, per E. Æquè igitur metietur vnitas ipſum E, & E, ipſum G, & G, ipſum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius E, & E, ipſius G, & G, ipſius K. *d* Proportionales ergo ſunt deinceps, vnitas, & numeri, E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſit ex eadem demonſtratione propoſ. 2. huius lib quod F, ſeipſum multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum I, faciat N; *e* metietur F, ipſum I, per F, & I, ipſum N, per eundem F: *f* Metitur autem & vnitas ipſum F, per F. Æquè igitur metietur vnitas ipſum F, & F, ipſum I, & I, ipſum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius F, & F, ipſius I, & I. ipſius N. *g* Proportionales ergo ſunt continue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vna cum vnitate, æqualis ſit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, (vt perſpicuum eſt ex propoſ. 2 huius lib. Nam duo E, F, ſunt ſecundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continue proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, ſeu A, ſibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, ſiue B, ſibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij, &c. Quod oſtendendum erat.

a 1. oct.
b 7. pronun.
c 5. pronun.
d 20. defin.
e 7. pronun.
f 5. pronun.
g 20. defin.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt, numeros qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatẽ habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C, hoc eſt, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem, id quod in ſcholio propoſ. 2. huius lib. quoque aſſeruimus.

Conſtat etiam ex demonſtratione hac, ſi numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit, & rurſum multiplicet productum, & ſic deinceps: omnes productos eſſe continue proportionales ab vnitate. Oſtenſum enim eſt & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione ſunt procreati, ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. continue eſſe proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

Cadant inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At vero inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rurſus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot ſunt inter vtrumque A, & B, & vnitatem. Quoniam igitur eſt, vt vnitas ad C, ita C, ad D, D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A:

A, 81.	M, 162.	N, 324.	O, 648.	B, 1296.
	E, 27.	K, 54.	L, 108.	H, 216.
	D, 9.	I, 18.	G, 36.	
	C, 3.		F, 6.	
		1.		
		Vnitas.		

a Metitur autem vnitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. *b* Quare C, ſeipſum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; *c* erit vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; *d* erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propoſ. 18 lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; *e* erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex iis, quæ à nobis ſunt demonſtrata ad propoſ. 18. lib 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, *f* erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F; A:

a 5. pron.
b 9. pron.
c 17. ſep.
d 17. ſep.
e 18. ſep.
f 18. ſep.

pro in-

proinde tot medij proportionales cadant inter A,& B, quot inter A, vel B,& vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C,D,E, vel F,G,H. Quocirca ſi inter duos numeros, & vnitatem, cõtinue proportionales ceciderint numeri,&c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Ex his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A,& B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F, habent.

Patet etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate cõtinue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium,& ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum,& ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, ex eo quod C,D,E,A, continue proportionales ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E,&c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium,& multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam;& ſemper deinceps vno amplius.

Sint numeri A,B,C,D, continuo ab vnitate proportionales,& ab eadem totidem alij E,F,G,H. Dico proportionẽ B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum,&c. Quoniam enim inter vtrumq; numerorum B, F,& vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter B, quidem & vnitatem, numerus A: At inter F, & vnitatem numerus E: a cadet quoque inter B,& F, vnus medius proportionalis: atque adeo per ſcholium huius propoſ. in ratione A, ad E. Cadat igitur,& ſit I. Eodem modo cadent inter C,& G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui ſint K,L; quot nimirum cadunt inter vtrumq; C, G, & vnitatem. Nec non inter D H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione

D,81. M,108. N,144. O,192. H,256.
a 10 oct. C,27. K, 36. L, 48. G,64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

tione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I, eſt autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E; & ſic de cæteris.

Hoc idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

Si ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium; & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quã habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

Sint ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodẽ totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum, proportionis B, ad F, eſſe duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K. & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Poſtremo ex F, quoque in ſe fiat Q; & ex F in Q fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis erunt A, K, L, M continue proportionales ab vnitate, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eademq; ratione erũt B, N, O, P, ab vnitate proportionales, nec non & F, Q, R, S.

E, 162.		I, 512.
D, 54.	*Vnitas.*	H, 128
C, 18.	1.	G, 32.
B, 6.		F, 8.
	A, 2.	
N, 36.	K, 4.	Q. 64.
O, 216.	L, 8.	R, 512.
P, 1296.	M, 16.	S, 4096.

Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius ſcholii: Eſt autem, ex definitione eiuſdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate eſt ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiuſdem, ex defin. duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cum ſit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata eſt rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius ſcholii, quod tam B, N, quam F, Q, ſint ab vnitate continue proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G,

E,81. I,1.
D,54. Vnitas. H.2
C.36, 1. G,4.
B,24. F.8.
A,16.
N,576.K.256.Q,64.
O,13824 L,4096.R,512.
P,331776.M,65536.S,4096

duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A; quod tam B N, O, quam A, K, L, ſint ab unitate continue proportionales, ex ſcholio propoſ 9. huius lib. & eiuſdẽ triplicata eſt ratio D, ad A, ex deſin. Igitur eſt D, ad A, ut O, ad L. Eodẽq; modo eſt A, ad H, ut L, ad R: quod utraq; proportio triplicata proportionis A, ad F: proportio quidem A, ad H, ex deſin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius ſcholij, propterea quod tam A, K, L, quam F, Q, R continue proportionales ſunt ab unitate, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eſt ergo ex æquo D, ad H, ut O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis B, ad F, ex 1. theor. eo quod tam B, N, O, quam F, Q, R, ſunt continue proportionales ab unitate ex ſcholio propoſ 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata eſt eiuſdem rationis B, ad F. non ſecus demonſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F, Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri unius ordinis deſinant in unitatem, ut ex ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua I, eſt unitas

Cæterum theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14 propoſ. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis univerſalem, hoc modo.

III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quod inter utrumque ipſorum, & aſſumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

Cadant inter utrumque numerorum A, B, & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales, inter A, quidem & C, numeri D, E, F, inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter, E & C &,

inter

	A,162. Q,216. R,288. S,384. B,512.
	F,54. O,72. P,96. I,128.
	E,18. N,24. H,32.
	D,6. G,8.
	C,2.
	K,9. L,12. M,16.

inter H. & C, Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D. ad G: erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt, D, ad G: Sed per theor. 2. huius ſcholij, ratio quoque E, ad H, duplicata eſt eiuſdem rationis D, ad G. Igitur eſt vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L: a cadet quoq; vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H & C, vnus medius cadit. Simili modo, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quatuor minimi numeri, oſtendemus, inter F, & I, duos medios cadere, ſicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadē ratione inter A, & B, tres medij cadent, ſi in eadē proportione D, ad G, ſumantur quinque numeri minimi. a 8. oct.

Hoc etiam verum eſt, ſi loco alterius numeri, nimirum B, vnitas aſſumatur, veluti perſpicuum eſt hac ſecunda figura, in qua numerus B, vnitas eſt, cadunt q; tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt &c.

	A,1048576. Q,32768. R,1024. S,32. B,1.
	F,65536. O,2048. P,64. I,2.
	E,4096. N,128. H,4.
	D,256. G,8.
	C,16.
	K,1024. L,32. M,1.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, nec non inter F, & I, atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero aſſumpto C, propinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

Duorum quadratorum numerorū vnus medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. xj.

	A,9. E,21. B,49.
	C,3. D,7.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, eſſe duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciat E. Quia igitur C, multiplicans ſeipſum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipſum D, multiplicans fecit E;

a 17 ſep. A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. ex conſtructione: a erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rurſus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex conſtructione: & multiplicans ſeipſum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum: b erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales ſunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D, cum hæc proportio eadem ſit, quæ A, ad E. Quorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 17. ſeptim.

SCHOLIVM.

Perſpicuum eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonſtratum eſt.

Pari ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, E, B, proportionalem ſint oſtenſi in ratione C, ad D, hoc eſt, eſſe A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum B, conſequens conſequentem ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipſum E, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cum & latus D, metiatur ſuum quadratum B: habebunt E, & B, communem menſuram D: Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

12. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere

dere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam eſſe proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, ſeipſum faciat E: & D, ſeipſum multiplicans faciat F: At C, & D, ſe mutuo multiplicantes faciant G: Multiplicantes vero G, faciant H. & I. Quoniam igitur C. ſeipſum, & D, multiplicans fecit E, & G; *a* erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & ſeipſum, fecerit G, & F: *b* erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, proptereaque E, G, F, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D. Rurſus, quia ex defin. cubi, C, ipſum E, multiplicans fecit A. & ex conſtructione multiplicans ipſum G, fecit H: *c* erit vt E, ad G, hoc eſt, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipſum G, multiplicans fecerit, ex conſtructione, numerum I: multiplicans vero ipſum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; *d* erit quoque, vt G, ad F, hoc eſt, vt C, ad D, ita I, ad B; *e* Eſt autem & H. ad I, vt C, ad D: quod C, & D, ipſum G, multiplicantes fecerint ex conſtructione, H, & I, Igitur A, H I B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D: Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue ſunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum ſit C, ad D, vt A, ad H. Quamobrem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

a 17. ſep.
b 17. ſep.
c 17. ſep.
d 17. ſep.
e 18. ſep.

SCHOLIVM.

Hic quoq; manifeſtum eſt, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in cõtinua propotione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H; & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

Eodem modo conſtat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & G, ad D, loquamur, metietur quoq; C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo & ipſum H, quod H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C, atq; adeo inter ſe compoſiti ſunt.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem, metietur quoq; D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B: immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D: Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A, poſteriorum vero trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi E.

xij.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoq; proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc euenier.

Sint continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicantes ipſos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoq; D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue eſſe proportionales. Multiplicantes enim A, & B, ſe mutuo faciant N; & B, C, ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128, L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048, M, 4096.

R, S. Simili modo A, multiplicans P, Q, H faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans ſeipſum, & B, fecit D, N. *a* erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem
a 17. ſep.
modo, quia B, multiplicans A, & ſeipſum fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; *b* erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit
b 17. ſep.
vt B, ad C, ita O, ad F; proptereaq; & E, O, F, continue proportionales ſunt in ratione B, ad C ſeu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione ſint continue proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeo D, E, F, continue proportionales ſunt.

Deinde

Deinde, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportionales. Item, quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; *a* erit quoque, vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, porportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7 H, R, S, porportionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; *b* erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H, R, S, I proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I, erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales.
a 18. ſep.
b 18. ſep.

Non diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Sunt autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A ad B, &c.

Iam quoque numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et ſic deinceps ſemper vno amplius.

Breuius propoſitionem totā demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F, & in hos ex eiſdem numeris G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F, & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, cōtinue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theorema. ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I, eſſe proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

A, 2.	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

Ex qua rurſum demōſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorū; ſecundo vero loco

procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib elicitur.

Quamuis autem in vtraq; demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propoſitionem dimõſtrabimus, etiam ſi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui ſeipſos multiplicantes faciant E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, a ex demonſtratis proportionales ſunt. Item F, G, H, cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſeipſos: hi vero ex B C, D, proportionalibus quoq; in ſeipſos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2.	*B, 4.*	*C, 8.*	*D, 16.*
E, 4.	*F, 16.*	*G, 64*	*H, 256.*
I, 8.	*K, 64.*	*L, 512.*	*M, 4096.*

a 13. oct.

xiij.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Metiatur quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 11. huius lib. A E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremũ B; b metietur quoq; A, primus ſecundum E. Quare cum ſit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur.

b 7. oct.

A, 4.	E, 12.	B, 36.
C, 2.	D, 6.	

Metiatur iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt demonſtratũ eſt propoſ. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoq; A, primus E, ſecundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. ſcholij propoſ. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

xiiij.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur & cubus cubum metietur.

Metiatur cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D.

Dico

Dico & latus C, metiri latus D. Vterq; enim C, & D, ſe ipſum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem ſe mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I Quoniam igitur, vt apparet ex demonſtratione propoſ. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, *a* metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D. a 7. oct.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

Metiatur iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt oſtenſum eſt propoſ. 12. huius libr Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipſum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaq; ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. XVI.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, *b* metietur & quadratus A; quadratum B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D. b 14. oct.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

Sed iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namq; A, metiri dicatur ipſum B; *c* metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum. c 14. oct.

THEOR. 15. PROPOS. 17. XVII.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur; neq; latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D,

a 15. oct. A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

Sed iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus b 15. oct. A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Proxime antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

Nam ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. c 14. & 15. oct. *c Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

Quod ſi latus C, lateris D, multiplex ſit: metietur latus D, latus C. d 14. & 15. oct. *d Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur.*

A 36. B, 9.
C, 6. D 3.

Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.

A, 64. B, 8.
C, 4. D, 2.

At vero ſi A, ipſius B quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex, non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. e 16. & 17. oct. *e Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3.

Similiter ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex, non metietur D, latus latus C. f 16. & 17. oct. *f Igitur, nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atq; adeo A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

A, 125. B, 8.
C, 5. D, 2.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

Duorum ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri ſimiles A,B, & latera illius ſint C,D, huius vero illis proportionalia E F: ita vt C, D, ſe mutuo multiplicantes faciant A, & E F, mutuo ſe multiplicantes faciant B, ſitque vt C, ad D, ita E ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E ad F, erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, *a* erit A, ad G, vt C, ad E hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E multiplicans D, & F, fecit G, & B, *b* erit quoq; G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A,12. G,18. B,27.
C,6. D,2. E,9. F,3.

a 17. ſep.
b 17. ſep.

Quia vero, cum A, G, B, ſint continue proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E. vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Quia oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, aſſumptorum.

Conſtat etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera conſequentes cōſequentem, ſi de proportionib. C, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoq; C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad B; vt C, ad E; vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram cōmunem habent tam C, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit

A, ad

A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentē; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mēſuram tam E, quam F; ideoq; erunt inter ſe compoſiti.

Ex qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

Sint ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; *a* erit vt C, ad F, ita I ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L. & K; *b* erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I. & L, fecerit A, & M, *c* erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; *d* erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. *e* Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in

A, 30. M. 60. N. 120. B, 240.	
I, 6. L, 12. K, 24.	
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.	

a 17. ſep.
b 17. ſep.
c 17. ſep.
d 17. ſep.
e 18. ſep.

es in ratione C, ad F, vel D, ad G. vel E. ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

Quoniam vero, cum A, M, N, B, ſint proportionales continue; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Cum demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F vel D, G, vel E. H, aſſumptorum.

Ex iis, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiam eſt, duos medios proportionales M N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F, vel D ad G vel E, ad H; hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur: metietur quoque C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem: quod ſit N. ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur: (Cum enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L, metietur E, ipſum M Deinde quia M N B proportionales ſunt ipſis I, L, K, metitur autem K, ipſum B, quod B, factus ſit ex K, in H, metietur quoque I, ipſum M: Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuũ I, a Igitur & C, D: metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, & quam E; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem Metiuntur vero & F, G, H, ipſum N; (Cum enim factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A M, N. ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quod A, factus ſit, ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F G ipſum N: atque adeo, F, G, H, ipſum N. metientur.) Necnon & ipſum B nimirum la-

A, 30. M. 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

a 11. pronun.

M,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

rum latera ſuum ſolidum Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, & quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N communes eſſe menſuras C, D, E, lateraq; prioris ſolidi A; At vero F G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

Quia verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerũ ſolidum procreari, ſiue primum latus ducatur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium: ſiue primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſiue deniq; ſecundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiã, propoſitis quotuis numeris, eundẽ ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinẽ inter ſe permutent. Quæ quidem res magnũ vſũ habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

Datis quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

A,3. B,5. C,8.
D,15. E,120. F,24. G,40.

Sint primum tres numeri dati A, B, C. & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur.

a 15. def in. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, a erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem Sed vt C, ad vnitatem, b ita quoque eſt F, ad A; quod

b 15. de fin. A, multiplicans C, faciat F Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: vt autem D, ad B, c ita eſt A, ad vnitatem; propterea quod A, multiplicãs

c 15. de fin. B, facit D Igitur ex æqualitate erit, vt E ad B, ita F, ad vnitatem: d atque idcirco numerus ex E, in

d 19. ſeptim. vnitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in G. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B, Quod eſt primum.

E, F,
D, A
B, vnitas

e 15. de fin. Rurſus quia ex C, in D, fit E; e erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem. Sed vt C, ad vnitatem, f ita etiam eſt G,

f 15. def. ad B, eo quod G, factus eſt ex B, in C Igitur erit,

g 15. de fin. vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, g ita eſt B, ad vnitatem, propterea quod D, factus eſt

h 19. ſeptim. ex A in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: h ac proinde numerus factus ex E, in vnitatẽ, id eſt, ipſe-

E, G.
D, B.
A, vnitas

mes

met numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E gignitur ex A, in B & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A quod eſt ſecundum.

Sint deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B; & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita vt præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe, fiant 11. multiplicationes diverſæ producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim vt in tribus oſtenſum eſt idem numerus fit, ſiue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, ſiue prius in D, deinde hic productus in C, conſtat id quod primo loco proponitur.

Deinde quia vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perſpicuum eſt eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D: tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod eſt ſecundum.

Tertio quoniam, vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur, ſiue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D ſiue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D tum ex A, in C, & ex producto in D & ex producto in B. Cum ergo ille ſit æqualis proxime oſtenſus primo producto, erit & hic æqualis eidem, quod eſt tertium.

Quarto quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A in D, & ex producto in B, gignetur quoque idem numerus ex A in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

Quinto quoniam, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C, producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, &

in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui ſit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintum.

Sexto, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus ſit ex A, in B, & ex producto in C, qui ſit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. quod eſt ſextum.

Septimo quia vt in tribus oſtendimus, idem numerus gignitur; ſiue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, ſiue prius in D, deinde hic productus in A; conſtat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ſit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proxime oſtenſus eſt æqualis ei, qui ſit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, Igitur & ille, quod eſt ſeptimum.

Octauo quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D; & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C, Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui ſit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic Quod eſt octauum.

Nono quia, vt demonſtratum eſt in tribus; idem numerus ſit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui ſit ex A in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic Quod eſt nonum.

Decimo quoniam, vt in tribus eſt demonſtratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei, qui ſit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

Poſtremo quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui ſit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod eſt vndecimum.

Eodem

Eodem argumentandi modo vtendum eſt in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque aſſumatur id, quod iam in quatuor demonſtratum eſt, & in ſex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam productus ex A in B cum C, D, E, conſtituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter ſe ordinem permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quē primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus. & ſic de cæteris.

A.	B.	C.	D.	E.
A.	B.	C.	E.	D.
A.	B.	E.	D.	C.
B.	C.	A.	D.	E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B, eſſe planos ſimiles. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi ſunt in ratione A, ad C, a metientur D, & E, ipſos A, & C, æqualiter; metianturque per F. Similiter æque metientur ipſos C, & B, metianturque per G. b Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C. c Item G, eoſdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G fecit C, & B, d erit, vt C, ad B, ita F, ad G. Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G. & permutando vt D, ad F, ita E ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E fecit B, erit & B, planus, cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, hoc eſt, D, ad F, vt E ad G, erunt ex defin. A, B plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros vnus, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 21. ſeptim.
b 9. pronun.
c 9 pronun.
d 17. ſeptim.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri.

CADANT inter A & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, eſſe ſimiles ſolidos. Sumantur tres, E, F, G,

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 12. K, 3. L, 3. N, 72.

minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; a erunt E, & G, plani ſimiles: ſint ipſius E, latera H, I, ipſius vero G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi ſint in ratione A, C, D, b æque metiuntur ipſos A, C, D, eiuſdem rationis cum illis, metiantur per M, eodemque modo. c quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; d ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus eſt autem E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, ſolidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, vt oſtendimus; e erit C, ad D, vt M, ad N: f Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipſos C, & D: Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos ſimiles E, G, cadit F, medius proportionalis per coroll. propoſ. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, ad I vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo ſunt latera, H, I, M, lateribus K, L, M; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A, & B. Quamobrem ſi inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 20. octaui.
b 21. ſeptim.
c 21. ſep.
d 9. pronun.
e 18 ſeptim.
f 17 ſep.

A, 24.	C, 72.	D, 216.	B, 648.		
E, 1.	F, 3.	G. 9.			
H, 1.	I, 1.	M, 24.	K, 3.	N, 78.	
A, 8.	C, 12.	D, 3.	L,	N, 3	
E, 4.	E, 6,	G, 9.			
H, 2.	I, 2.	M, 2.	K, 3.	L, 3.	N, 3

SCHOLIVM.

Duo exempla appoſuimus, in quorum priori liquido conſtat, vnitatem E, eſſe planum numerum, & vnitates H, & I, eius latera, licet impropriè, vt in definitione numeri plani monuimus, Si enim vnitatē à numeris planis excludamus, nō poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodē priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamque ſine vlla exceptione demonſtret.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; a erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324. a 20. octaui.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus Dico &, quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A. & D, cadant duo medij proportionales B, C; b erunt A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quam obrem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 27. B, 45 C, 75. D, 125. b 21. oct.

SCHOLIVM.

Hæc eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio præcidentium duarũ propoſitionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet ſane mancam eſſe & imperfectam. cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunque lateribus unius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia, dũmodo quibuſdam lateribus unius proportionalia ſint quædam alterius. Iure optimo quis inficiari poterit, ſi duorũ planorum ſimilium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorũ vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubũ: quod tamẽ in demonſtratione pro conceſſo, atq; omnib. perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus: ſatis eſt, vt duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, nimirum 4 & 16. proportionalia. Vnde etiã ſi prior ſit quadratus habẽs duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis poſſit, imo omnino negare, poſteriorẽ habere alia duo latera his proportionalia, hoc eſt inter ſe quoq; æqualia, atq; adeo eſſe quadratum: quemadmodũ etiam manifeſtũ eſt, hiſce lateribus prioris 4. & 9 vel 2. & 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportiona-

tionalia. Si igitur his lateribus priorum numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles, cur ſine demonſtratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur, modum.

Sint tres numeri A, B, C: continue proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D latere quadrati A, cum D, ex defin. in ſe faciat A, erunt D & A, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales, eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales nimirum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib inter vnitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui ſit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri ſunt continue proportionales; producetur C ex E, in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 10 huius lib. Ac proinde C quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36, B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
vni.tas.

Aliter. Sumptis tribus numeris D, E, F minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipſum A, & F ipſum C atque ex ijs, quæ oſtendimus ad propoſ. 1. lib 7. Et quoniam extremi D, F minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. ſunt quadrati: Eſt autem A quadratus ex hypotheſi; a cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero eſt ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F & permutando, vt A, ad, D, ita C ad F; b cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; c metietur idem & ſecundum H. Sumpto autem I latere quadrati F, metiatur I toties numerum K, quoties F, ipſum H, metitur; ita vt H, ad F & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L quadratus ipſius K. d Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata eſt rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc eſt H ad F; eſt autem & ratio C, ad F, eiuſdem rationis H ad F ex defin. duplicata, quod conuertendo ſint proportionales etiam C H F erit L, ad F vt C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales ſunt. Exiſtente ergo L, quadrato, ex conſtructione & C, quadratus erit.

a 11. oct.
A, 36. B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
D, 9. E, 12. F, 16
L, 64. K, 8. I, 4.
b 8. oct.
c 7. oct.
d 11. oct.
e 20. oct.

ALITER. Quoniam A & C, ſimiles plani ſunt ſint eorum latera proportionalia, D, E quidem ipſius A, ac F, G, ipſius C; ita vt ſit D, ad

ſit D, ad E ſicut F, ad G: aſſumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A producitur ex D, in E, & ex H, in ſe, a erunt D. H. E, continue proportionales. Cum ergo ſit

A, 36. B, 48. C, 64. a 20. ſep.
H, 6. I, 8.
D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.

F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius proportionalis H, b cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui ſit I. b 8. oct.
Quare cum F, I, G, ſint continue proportionales; c idem numerus fiet ex F, in G qui ex I in ſeipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C fiet ex I, in ſeipſum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I. c 20. ſeptim.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.

Sint rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D quartum, cubum eſſe. Sumpto enim E, latere cubi A, fiat ex E, in ſeipſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A erunt ex ſcholio propo. 9. huius lib. E F A, continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum tam inter numerum D, quam vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent ex theoremate 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia vnitas & numeri G, H, D, continue ſunt proportionales: fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G, in productum H, vt ad propoſ. 10. huius lib. à nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus eſt, ex definitione, cuius latus G.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
vnitas.

Aliter. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipſum A, & H, ipſum D, æque, per ea, quæ ad propoſ. 21. lib. 7. demonſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A, cubus, ex hypotheſi; d cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; e cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, f me- d 12. oct. e 8. oct. f 8. oct.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16. L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.

 tietur

tietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. a Itaq; cum ratio P, ad H cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L H: erit P, ad H, vt D ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus ſit ex conſtructione, cubus quoque erit D.

a 12. oct.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D, ſitq; A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratum. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; b cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; c cadet quoq; inter A, & B, medius vnus, qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt cõtinue proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus; erit & B, tertius quadratus. d Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.

b 11. oct.

A, 36.	F, 48	B, 64.	
C, 9.	E, 12.	D, 16.	

c 8. oct.

d 22. oct.

COROLLARIVM.

Liquet ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, e eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, eſſent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. exiſtente quadrato, f eſſet & 8 quadratus. Igitur & 16. & 32. & c. quod eſt abſurdum. g Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, ſi eſſent quadrati: cũ tamen in ſcholio propoſ. 8. huius lib. demonſtratũ ſit, inter numeros duplæ proportionis quoſuis non poſſe cadere medium proportionalem.

e 24. oct.

f 24. oct.

g 11. oct.

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, h caderet inter eos medius proportionalis. i Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri nõ poſſe, demonſtratum à nobis eſt in ſcholio propoſ. 8. huius lib.

h 11. oct.

i 8. oct.

xxiij. THEOR. 23. PROPOS 25.

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cu-

bus nu-

bus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus, & ſecundus cubus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum, ſitq; A, cubus. Dico & B, cubum eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D, *a* cadant autem a 12. oct.
inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui ſint E, F: *b* cadent quoq; inter A, & B, duo medij, qui ſint G, H. b 8. oct.

A, 8.	G, 12.	H, 18.	B, 27.
C, 64.	E, 96.	F, 144.	D, 216.

Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt continue proportionales, & A, primus eſt cubus: *c* erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri c 23. oct.
rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

C O R O L L A R I V M.

Patet etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, *d* eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, d 25. oct.
quam cubi proportionis repertę, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint plani ſimiles A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles; *e* cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. e 18. oct.

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, (ex corol. 1. propoſ. 2. huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, vt eſt quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F,

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

Ergo ſimiles plani numeri rationem inter ſe habent, &c. Quod demonſtrandum erat.

S C H O L I V M.

Facile etiam demonſtrabimus conuerſum huius, videlicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.

Habeant numeri A, B, proportionem inter ſe, quam quadrati C, D. Dico A, B, eſſe planos ſimiles. f Quoniam enim inter quadratos C, f 11. oct.

A, 8.	B, 18.
C, 16.	D, 36.

 D, cadit

D cadit vnus medius proportionalis: Et eſt, vt
a 8. oct. *A, 8. B, 18. C, ad D, ita A, ad B; a cadet quoque medius pro-*
b 19. oct. *C, 16. D, 36. portionalis inter A, & B, b Quare A, & B, pla-*
ni ſimiles ſunt.

Ex hoc perſpicuum eſt, planos numeros, qui ſimiles non ſunt, proportionem non habere, quā quadratus ad quadratum. Si enim haberent; eſſent, vt modo demonſtratum eſt, plani ſimiles, quod eſt abſurdum, ponuntur enim non ſimiles.

XXV. THEOR. 25. PROPOS. 27.

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint ſimiles ſolidi A, B. Dico eſſe, vt A ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, ſunt
c 19. oct. ſolidi ſimiles; c cadent inter eos duo medij proportionales, qui ſunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. prop. 2. huius lib. cubi. Quare cum ex æquo ſit A, ad B, vt E, ad H; conſtat ita eſſe A, ad B, vt eſt cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLIVM.

Conuerſum huius etiam demonſtrabimus; ſcilicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles.

Numeri enim A, B proportionem habeant inter ſe, quam cubi C, D. Dico A, B, ſolidos eſſe ſimiles. Nam cum
d 12. oct. *A, 16. B, 54. ſit A, ad B, vt C, ad D; d cadant autem inter*
e 8. oct. *C, 64. D, 216. C, D cubos duo medij proportionales, e cadent*
f 21. oct. *quoque inter A, B, duo medij. f Sunt ergo A, & B, ſolidi ſimiles.*

Ex his omnibus perſpicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionē, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientē, eſſe
g 18. oct. *ſimiles planos, vel ſolidos. Si enim eſſent ſimiles plani, g caderet inter eos vnus medius proportionalis, quod fieri non poſſe, iam dudū oſtenſum eſt in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt ſimiles ſolidi, cum inter eos cadere nō poſſint duo medij proportionales. Nā*
h 8. oct. *h alias caderēt quoq; duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non poteſt, quod hi vel ſola vnitate, vel certe binario tantū inter ſe diſtent, vt in ſcholio prædicto traditum eſt; in-*

eſt, inter quos certum eſt, non poſſe recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

Similiter nec duo quiuis numeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles, vel ſolidi, cum non poſſunt habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui ſit numerus primus, latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quiuis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit latera tantum habet duas vnitates, & ſeipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1.1.29 & 1.1.47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

Rurſus neque duo quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani, vel ſolidi ſimiles; a cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continue proportionales, vt in ſcholio propoſ. 24. lib. 7. demonſtrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. a 18. & 19. octa.

Ex his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem. Nam ſi eum non numeraret; b eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi, ac proinde vt proxime oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles: quod abſurdum eſt, & contra hypotheſin. Verum hoc oſtenſiue quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A, B; ſitque A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi b 31. ſep.

A, 3.		B, 48.	
C, 1.	D, 3.	E, 4.	F, 12.

A, ſint C, vnitas, & numerus D, ipſi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipſi A æqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, laterib. C, D, proportionalia, ita vt ſit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. c Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum, æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium. Fit autem ex C, vnitate in F, ipſemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. d Quare D, ipſum F, metietur: e Metitur autem F, ipſum B, quod numerus B, gignatur ex E, in F. f Igitur & D, hoc eſt, A, illi æqualis, ipſum B, metietur, quod eſt propoſitum.

c 19. ſep. d 4. pron. num. e 4. pron. num. f 11. pron.

Hinc perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Sint deinde duo ſolidi ſimiles A B, ſitq; A minor primus. Dico A, ipſum C, metiri. Nam cum A & B ſint ſolidi ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B, C, vnitates, & numerus D, ipſi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter vnitatem & numerum D ipſi A æqualem, metiatur numerũ primum A: ſint E F G, latera numeri B, lateribus B C D proportionalia,

A, 3. B, 24.
B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2. G, 6.

ita vt ſit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur eſt C, ad F, vt D, ad G: erit permutando C, ad D, vt F, ad G. a Igitur numerus factus ex C, primo in G quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in F, tertium. Fit autem ex C, vnitate in G, ipſemet numerus G. Idẽ ergo numerus G, fiet ex D, in F. b Quare D ipſum G, metietur. c Metitur autem G, ipſum B, quod G, latus ſit ipſius B. d Igitur & D, hoc eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

Atq; ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, nõ eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Itaq; facilis admodum eſt inuentio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani vel ſolidi non ſimiles.

Rurſus quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit alter vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles; e haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16, quadrato, f eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, vt 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, g haberent proportionem quã cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, h eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum: ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani ſimiles A B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, Dico C quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum ſint plani ſimiles, *b* vnus medius cadit proportionalis. *c* Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt ſint continue proportionales D, E, C. Itaq; cum tres D, E, C, continue ſint proportionales, ſitque primus D, quadratus, ex conſtructione; *d* erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 17. *sep.* b 18. *oct.* c 8. *oct.* d 22. *oct.*

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt. ij.

Duo numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A B, eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; *e* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *f* At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. *g* Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; *h* Ac propterea

A, 6, B, 54.
D, 36. C, 324.

e 17. *sep.* f 11. *oct.* g 8. *oct.* h 20. *oct.*

præterea A, & B, ſimiles plani ſunt, Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes, &c, Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Ex his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

I.

Si duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

A,4, B,25.
C,100.

Duo quadrati A B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe quadratum. Cum enim A, & B, ſint ſimiles plani, nimirum quadratiq
a 1. noni. *a erit C, ex eis productus, quadratus.*

II.

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

Duo numeri A B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; ſitq́; A, quadratus. Dico & B, quadratum eſſe. Cum enim A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C,

A,9, D,12. B,16.
C,144.

b 2. noni. *quadratum: b erunt A, & B, ſimiles plani: c atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis; videlicet D. d Quare A,*
c 18. oct.
d 22. oct. *existente quadrato, erit & B, quadratus.*

III.

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Duo numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; ſitque A quadratus. Dico B, non quadratum eſſe. Si enim B, dicatur eſſe quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1 huius ſcholij; Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non igitur quadratus eſt B, numerus.

A, 4. B, 10.
C, 80.

IV.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, ſe mutuo multi-

multiplicantes faciant C. Dico C, non eſſe quadratum. Nam ſi C, foret quadratus, cũ producatur ex A, in B, ſitq; A, quadratus, eſſet & B, ex theor. 1. huius ſcholij quadratus: Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non igitur C, quadratus erit.

A,9. B,20.
C, 1,80.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B. Dico B, eſſe cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in ſe fiat D; & idcirco ex C, in D, ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C, ſeipſum multiplicans fecit D: *a* metietur C, ipſum D, per C: *b* Metietur autem & vnitas ipſum C, per C. Igitur eadem pars eſt vnitas ipſius C, quæ C, ipſius D, nimirum denominata à C; Ac proinde *c* vt vnitas ad C, ita C, ad D: Ruſus quia C, multiplicans D, fecit A; *d* metietur D, ipſum A per C, Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars eſt C, ipſius D, quæ D, ipſius A. *e* ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: ſed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atq; adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. *f* At quia A, ipſum B, metitur per A quod A, ſeipſum multiplicans fecerit B; *g* metitur vero & vnitas ipſum A per A; Eadem erit pars vnitas ipſius A, quæ A, ipſius B; *h* Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D, *i* cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, ſint continue proportionales, & A, primus ſit cubus, *k* erit quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſeipſum multiplicans &c. Quod erat demonſtrandum.

A,8.
E,16. D,4.
F,32. C,2.
B,64. Vnitas.

a 7 pronun. *b* 5. pronun. *c* 20 de. *d* 7. pronun. *e* 20. de. *f* 7. pronun. *g* 5. pronun *h* 10. def. *i* 8. oct. *k* 23. oct.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum eſſe. multiplicans enim A, ſeipſum faciat D; *l* eritque D, cubus. Quoniam vero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, *m* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *n* At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. Igitur & inter

A,8. B,27.
D,64. C,216.

l 3. nond. *m* 17. ſeptimi. *n* 12. oct. *o* 8 oct.

a 13. oct. inter D, & C, duo medij proportionales cadent; a Ac propterea D, exiſtente cubo, & C, cubus erit. Quocirca ſi cubus numerum cubum numerus multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

Fiat ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, b 12. noni. cubum eſſe Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D; b qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, c erit vt A, ad B, ita D, ad C; d At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent; f Ac proinde exiſtente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem ſi cubus numerus numerum quendam multiplicans, & c. Quod oſtendendum erat.

A, 8. B, 27.
c 17. sep. D, 64. C, 216.
d 12. oct.
e 8. oct.
f 12. oct.

SCHOLIVM.

Ex hiſce hæc, quæ ſequuntur, facile demonſtrabuntur, videlicet.

I.

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

A, 8. B, 20.
g 5. noni. C, 160.

Fiat ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non eſſe cubum. Si enim C, ſit cubus; g & multiplicatus B, cubus erit, quod nō ponitur.

II.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

A, 8. B, 17.
h 4. noni. C, 136.

Fiat ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non eſſe cubum Si namque B, ſit cubus, h & factus cubus C, cubus erit. quod eſt contra hypotheſin,

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat; Et ipſe cubus erit.

MVLTIPLICANS ſeipſum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum eſſe. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit. cum A, in ſe faciat B, & ipſe C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis ſit, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ ad definitionem cubi ſcripſimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C;

A, 8. B, 64. C, 512.

a eri

aerit & A, cubus. Quare ſi numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonſtrandum. a 5. noni.

SCHOLIVM.

Aliam demonſtrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt & quidem longiorem. Poſtquam enim demonſtrarunt C, factum ex A, in B, eſſe cubum, inferunt: b *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* c *Quoniam vero eſt vt B, ad C, ita A, ad D, quod A, multiplicans A, & B, ipſos B, & C, fecit;* d *cadent quoq; inter A, & B, duo medij proportionales.* e *Atq; adeo exiſtente B, cubo, & A, cubus erit. Verum noſtra demonſtratio breuior eſt, & planior, vt perſpicuum eſt.* b 12. octa. c 17. sep. d 8. octa. e 23. octa.

A,8. B,64. C,512.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus ſolidus erit.

Numerus compoſitus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, eſſe ſolidum. Cum enim A ſit compoſitus, f metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis; metiatur D, ipſum A, per E. Quo poſito g multiplicante D, ipſum E, producetur A. Cum ergo B ipſum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea ſolidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter ſi compoſitus numerus numerũ aliquem multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum. f 13. def. g 9 pro-num.

A,6. B,11. C,66.
D,2 E,3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes: Quartus autẽ eſt cubus. & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus, ſimul, & quadratus, & quinq; intermittentes oẽs.

Sint ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate eſſe quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales ſunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt F, I, M, ſeptimum vero F, cubum ſimul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimi-

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.
H,6561. I,19683. K,59049. L,177147. M,531441.

rum

rum M. Quoniam enim eſt vnitas ad A, vt A, ad B; æque metie-
a 5. pron. tur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: *a* Metitur
autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipſum B, per A, me-
b 9. pron. tietur; *b* Atque adeo A, multiplicans A, ipſum B, producet. Qua-
re B, quadratus eſt: Quia vero tres deinceps proportionales ſunt
B, C, D, & eſt B, quadratus; *c* erit & D, quadratus. Eadem ratione
c 22. octa. aſſumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, ſit
quadratus, *d* & F, quadratus erit; Nec non & omnes vnum inter-
d 22. octa. mittentes.

Rurſus quia eſt vnitas ad A, vt B, ad C, æque metietur vnitas
e 5. pron. numerum A. & numerus B, numerum C: *e* Metitur autem vnitas
ipſum A, per A. Igitur & B, ipſum C, per A, metietur, *f* atque adeo
f 9. pron. B, ipſum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum
A, ſeipſum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt
eſt oſtenſum, erit C, cubus: Quia vero quatuor deinceps propor-
g 23. octa. tionales ſunt C, D, E, F; & eſt C, cubus; *g* erit & F, cubus. Eodem
argumento aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H,
h 23. octa. I, cum F, ſit cubus, *h* & I, cubus erit, atq; omnes ſemper duos inter-
mittentes.

POSTREMO quia F, ſeptimus ab vnitate oſtenſus eſt &
quadratus, & cubus; ipſe erit cubus ſimul & quadratus: Atque
eodem modo M, ſeptimus ab F, intermiſſis nimirum quinque
G, H, I, K, L; cubus erit ſimul & quadratus; Nec non & omnes
quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri
deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtran-
dum.

SCHOLIVM.

Hoc theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

Si ſint quotcunq; numeri ab vnitate continue pro-
portionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum
in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt
quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime nu-
mero poſitos in locis tertio, ſexto, nono, duodecimo,
decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius
metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, de-
cimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus,
&c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur nu-
meros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimo octa-
uo, vigeſimo quarto, & alijs quæ metitur ſenarius, qua-
les ſunt ſeptimus tertius decimus, decimus nonus, vi-
geſimus quartus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

Nam

IN primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate: Numeri deniq; tertij ordinis quinq; ſemper interponũt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero poſt vnitatem ſit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem ſit cubus, & reliqui omnes cubi erunt. ix.

Sint ab vnitate continue proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus vnitati quadratus.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint; *a* iam demonſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres con- *a 8. noni*

Vnitas. A, 4 B, 16. C, 64 D, 256. E, 1024. F, 4096.

tinue proportionales ſint A, B, C; ſitque A, quadratus; *b* erit & C, quadratus. Eademque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, ſit quadratus; *c* & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F quadrati ſunt. Idem oſtẽdemus, ſi plures numeri ſint continue proportionales. *b 22. oct.* *c 22. oct.*

Sit iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes,

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, *d* iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: *e* Metitur autem vnitas numerum A, per ipſummet A. Igitur & A, ipſum B, per ſeipſum metietur; *f* A, que adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. *g* Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus, *h* & D, cubus erit. Eademque ratione, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus ſit: *i* & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi ſunt: Non ſecus demonſtrabimus, omnes cubos *d 8. noni.* *e 5. pron.* *f 9. pron.* *g 5. noni.* *h 23. oct.* *i 23. oct.*

i eſſe

eſſe, ſi plures continue proportionales fuerint. Quocirca, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Non demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt vnitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicue hoc ipſum ex demõſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus; qua parte eſt cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte eſt quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

Verum tota propoſitio facilius ita poterit demonſtrari. Sit primum A, proximus vnitati quadratus. Dico & omnes quadratos eſſe. Quoniam, n. ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, ſeipſum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem ſcholio A, multiplicans B, facit C, ſuntq; A, B, quadrati; erit & C, quadratus;

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. Rurſus quia ex eodẽ ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicãs C, facit D ſuntq; A C, quadrati; erit ex eodem ſcholio propoſ. 2. huius lib. & D, quadratus: Atq; ita deinceps: cum ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A multiplicans D producat E; & multiplicans E faciat F, &c.

Sit deinde A proximus vnitati cubus. Dico & omnes eſſe cubos. Quia enim ex ſcholio propoſ. 10 lib. 8. cubus A, ſeipſum multiplicans

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

a 3. noni. *facit B; a erit & B, cubus. Item quia ex eodem ſcholio A, multiplicans B, facit C, ſuntq; A, B, cubi, b erit & C, cubus. Rurſus quia ex*
b 4. noni. *eodem ſcholio A, multiplicans C, facit D, ſuntq; A, C, cubi; c erit quoq; D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex ſcholio, A, multiplicans*
c 4. noni. *D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem, non ſit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, non ſit cubus, neq; alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

Sint

Sint ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati non ſit quadratus. Dico nec alium vllum eſſe quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, hoc eſt, præter B, L, F, H, &c. Si enim præter hos alius eſt quadratus, ſit quadratus E.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16. E,32. F,64. G,128. H,256. I,512. K,1024. L,2048. M,4096.

a Cum ergo & D, ſit quadratus; ſitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B; & conuertendo, vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: b ſed B, tertius ab vnitate eſt quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod eſt abſurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus eſt. Eadem ratione oſtendemus, nullum alium, præter dictos quadratum eſſe. — a 8. noni / b 8. noni. / c 24. oct.

Sed iam A, proximus vnitati non ſit cubus. Dico nec alium vllum eſſe cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam ſi præter hos alius poteſt eſſe cubus, ſit D, cubus. d Cum ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: e Sed C, eſt cubus, cum ſit quartus ab vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit, quod eſt contra hypotheſin. Non igitur D, cubus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus; g cum & C, cubus ſit, ſitq; ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E ad cubum C, ita C, ad A; exiſtente C, cubo, h erit, & A, cubus, quod nõ ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E inter duos cubos C. & F, cubos non eſſe, ita quoq; eadem ratione oſtendemus neque G. & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat. — d 8. noni / e 8. noni / f 25. oct. / g 8. noni. / h 25. oct.

SCHOLIVM.

Non eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul & quadrato.

Sit enim primum A, qui poſt vnitatem, cubus quidem non au-

tem ſimul & quadratus. Dico B tertium eſſe cubum ſimul, & quadratum; cubum quidem, a quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſint, b quadratū vero, quod tertius ſit ab vnitate.

a 9. noni. b 8. noni

Vnitas. B,8. B,64.

Sit deinde A, poſt vnitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe cubum ſimul, & quadratum; c Cubum quidem quod quartus ſit ab vnitate; quadratum vero, d quod primo exiſtente quadrato, omnes ſint quadrati.

Vnitas. A,4. B,16. C,64.

c 8 noni d 9. noni

Sit poſtremo A, poſt vnitatem neq; cubus neq; quadratus. Dico nullum alium eſſe cubum ſimul & quadratum, præter ſeptimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non exiſtente

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

e 10. noni. *quadrato, e nullus alius quadratus ſit, præter tertium ab vnitate, vt vnum intermittētes omnes, cuiuſmodi ſunt, vt in ſcholio propoſ. 8 huius lib. docuimus, tertius, quintus, ſeptimus, nonus, vndecimus decimustertius, decimusquintus decimusſeptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non exiſtente cubo,* f 10. noni. *f nullus alius ſit cubus præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales ſunt, vt ex eodem ſcholio apparet, quartus, ſeptimus, decimus, tertius decimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. Perſpicuum eſt tantummodo ſeptimum, tertiumdecimum, decimumnonum quæ quidem omnes quinq; intermittunt, quadratos eſſe ſimul & cubos, & ſic de cæteris. Nam in hæc loca ſola incidunt quadratus, & cubus ſimul, vt liquido conſtat ei, qui recte propoſitionum harū & octauam huius libri expenderit.*

xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A,B,C,D,E,F,G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem,

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim ſit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D, g 20. defin. g æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum

rum G: *a* Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet *D*. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur: Eadem ratione, metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A &c. Sic quoque metietur, A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo vt A ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. a 5. pronun.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt ex his quantum abeſt maior numerus à minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, me-

Vnitas. *A* 3. *B*, 9. *C*, 27. *D*, 81. *E*, 243. *F*, 729. *G*, 2187.

tietur F, *per* D; *Et* C, *metietur* F, *per* C, *nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter* B, *&* F *quam inter vnitatem &* D, *tres numeri interponuntur: Et tam inter* G, *&* F, *quam inter vnitatem &* C, *duo interiecti ſunt numeri.*

Hinc rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantũ ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à maiore diſtat quantum minor ab vnitate, propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet tum per quem metitur, b producitur ille, quem metitur Ergo C, *ſeipſum multiplicans gignet* F, *cum* F, *tantum abſit à* C, *quantum* C *ab vnitate; ac propterea* C, *ipſum* F, *per* C, *metiatur, vt diximus. Sic quoq; B. multiplicans, D, faciet eundem F: quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis* b 9. pronun.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

Sint ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum Si namq; non metitur ipſum A: *c* erit E. cum primus ſit, ad A primus; hoc eſt, c 13. ſep[illegible]

A, &c.

a 9. pro- pun. A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, *a* atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedentis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. *b* Quare erit

b 19. ſe- vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum

c 23. ſep. ergo A, & E, ſint inter ſe primi; *c* ac proinde in ſua proportione

d 21. ſep. minimi; *d* metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E,

e 9. pro- pun. ipſum C, per G, *e* atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B,

f 9 pro- pun. *f* atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium.

g 19. ſe. *g* Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundum, ita G tertius ad B, quartũ.

Vnitas A 10. B, 100. C, 1000. D, 10000.
E, 5. H, 20. G, 200. F 2000.

Quapropter cum A, & E, ſint inter ſe primi; *h* ac propterea in

h 23. ſep. ſua proportione minimi; *i* Metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum

i 21. ſep. B. Metiatur E, ipſum B per H; *k* ita vt E multiplicans H, faciat

k 6. pro- pun. B. Metitur autem & A, ipſum B per A: atque idcirco A, ſeipſum multiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in ſeipſum. *l* Quare erit vt E, primus ad A, ſecun-

l 20. def. dum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter ſe primi ſint; *m* ac proinde in ſua proportione minimi; *n* æque metie-

m 23. ſe- ptim. tur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſin. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non

n 22. ſe- ptim. metiri: Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metietur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus quoſcumque alios numeros primos ipſum D, metientes metiri quoque ipſum A; Eademq; erit ratio ſi C vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

ALITER Metiatur E numerus primus vltimum D. Dico &

o 31. ſep. E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur, *o* erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans facit B, vt ex ſcholio propoſ. præcedentis conſtat, *p* erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E,

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216 D, 1296
E, 7.

p 27. ſe- ptim. primi ſunt; fit autem C, ex A in B, per idem ſcholium præcedentis

q 26. ſe- ptim. propoſ. *q* erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi ſunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præce-

r 26. ſe- ptim. dentis propoſ. *r* erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſin. Metitur ergo E, ipſum A, Si igitur

tur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonſtratum eſt: quod non ponitur.

SCHOLIVM.

Eſt autem admirabilis prima huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E. dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demonſtratione affirmatiua E. ipſum A. metiri: quod videtur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat Socratem eſſe albū ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in aliis nonnullis propoſitionibus, quæ ſequuntur. Cardanus quoq; ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturq; ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum non dicturum fuiſſe, ſi diligentius vim huius demōſtrationis expendiſſet, vel certe ſi expendit, eam in memoriam reuocaſſet, quandoquidem ipſo longe prior Euclides vſus eſt hoc etiā demonſtrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demonſtrandi vſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. vt ibidem monuimus. a 12. nonı.

Cæterum ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum. a Cum enim metiatur proximū vnitati; hic autem omnes ſubſequentes; b quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris; c manifeſtum eſt quod & ille omnes metiatur. b 11. noni. c 11. pron.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero poſt vnitatem primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A. proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 624.
E---- H---- G---- F----

Manifeſtum aūt eſt, E, nō eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremum D, d metietur quoque ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt ſed cum poſitus; e atque adeo cum aliquis numerus primus metie- d 12. noni. e 31. ſep.

tur, quem dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus quàm A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; *a* metietur quoq; ille alius primus eundem D; *b* atq; adeo & ipſum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C; *c* & viciſſim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, per E, *d* Cum ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipſorum A, B C, erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B C, quod eſt contra hypotheſin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniam vero E, metitur D, per F, *e* metietur viciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; *f* metietur & A, proximum vnitati, qui primus eſt, quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; *g* atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A.

a 11. pronun.
b 12. noni.
c 8 pronun.
d 11. noni.
e 8. pronun.
f 12. noni.
g 33. ſep.

Vnitas. A, 5. B, 25 C 125 D. 625.
E --- H -- G -- F ---

Si namque alius primus quam A, metiatur F, cum F, metiatur D, extremum; *h* metietur quoque ille alius primus eundem D; *i* atque adeo & ipſum A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum Ergo non alius primus quam A, ipſum F, metitur, Iam vero quoniam E, metitur D, per F. *k* fit D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium; *l* Ac proinde erit vt A primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipſum E, vt oſtenſum eſt. Ergo & F, ipſum C, metietur. Metiatur per G Quoniam igitur F diuerſus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter, G, diuerſum eſſe ab, A B, & non primum, ſed compoſitum quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A B C, metiebatur D, vltimum.

h 11. pron.
i 12. noni
k 9 pronun.
l 19. ſeptim.

Si enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, metiaturque F, ipſum C, per G; metietur vtique F, ipſum C, per aliquem ipſorum A, B; *m* & viciſſim aliquis ipſorum A B, (videlicet is, per quem F, ipſum C, metitur) metietur C, per F *n* Cum ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B, quod eſt abſurdum. Oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, quem aliquem ipſorum A, B. Non ergo G,

m 8. pron nun
n 11. noni.

go G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed diuerſus. Quoniam
autem F, metitur C, per G; *a* metietur viciſſim G, ipſum C, per F. a 8. *pro-*
Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiaturque vlti- *num.*
mum C, *b* metietur quoque numerum primum A, vnitati proxi- b 12. *no-*
mum. quod eſt abſurdum. Non ergo G primus eſt, ſed compoſi- *ni.* (?)
tus, *c* ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum c 33
alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quam A, metiatur
G, cum G, metiatur C, vltimum, *d* metietur quoque illi alius pri- d 11. *pro-*
mus eundem C, *e* atque adeo ipſum A, vnitati proximum qui pri- *num.*
mus eſt, quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, i- e 12. *no-*
pſum G, metietur. *f* Iam vero quia C, ſit ex F, in G. quod F, metia- *ni.*
tum C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcho f 9. *pro-*
lio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, *num.*
quartum, & ex F, ſecundo in G, tertium. *g* Quare erit vt A, primus g 19. *ſe-*
ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, i- *ptim.*
pſum F, vt demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B metietur, me-
tiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A metitur B, vltimum (re-
linquimus enim iam numeros C, & D,) per H, oſtendemus ſimili-
ter H, diuerſum eſſe ab A. quemadmodum id oſtenſum eſt de nu-
meris F, & G.

Nam ſi H, idem ſit qui A, metiaturque G. ipſum B, per H; metie-
tur vtique G, ipſum B, per A; *h* Et viciſſim A, ipſum B, per G, me- h 8 *pro-*
tietur. Cum igitur metiatur A. ipſum B, per A, vt conſtat ex ſcho- *num.*
lio propoſ. 1. huius lib. erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum. o- i 9. *pro-*
ſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem quem A. Non ergo H, idem *num.*
eſt, qui A, ſed diuerſus. *i* Iam vero quia B, fit ex G, in H, quod G,
ipſum B, metiatur per H; Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcho-
lio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H pri-
mo in G, tertium, & ex A, medio in ſe ipſum *k* Quare erit vt H, pri k 20. *ſe-*
mus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur *ptim.*
ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur, & H, ipſum A metietur, nu-
merum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt,
maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C.
Ac proinde ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportio-
nales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 14 PROPOS. 14. xiv.

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

Sit numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B,
C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri
ipſum A. Metiatur enim ſi fieri poteſt, primus numerus E, di[illegible]

A............................

B..C...D.....

E ---.F-------

ſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia, igitur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipſum F, faciet A, b Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E F, metientur; non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt quam A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 9 pronun.

b 31. ſeptim.

SCHOLIVM.

Addit hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compoſitus.

Sint quotcunque numeri continue proportionales A B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G. Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F vel G, certe ad alterum eorum compoſitũ eſſe. Sit enim H, non primus ſed compoſitus: c ſumantur in eadẽ proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E.

c 2. oct.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

M, 8. N, 12. O, 18 P, 27.

I, 4 K, 6 L, 9.

H----- F, 2. G, 3.

Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metitur autem H, ipſum A, erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F. vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum, ſi vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8 erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. 32 lib 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad I, cum I, gignatur ex F, in ſe ipſum, erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. lib. 7. Quod ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

Deinde metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compoſitus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodẽ modo

modo compoſitus vel ad F. vel ad K. Si ad F. habetur propoſitum. ſi vero ad K, cum K. gignatur ex F. in G, erit quoque H. compoſitus vel ad F. vel ad G. Quod ſi H. ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eum metiri vel F. vel G. ex propoſ. 32. lib. 7.

Rurſus metiatur H, non primus tertium C, qui cum fiat ex F, in O, erit H, compoſitus vel ad F. vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad O, qui quidem fit ex F. in L, erit H. compoſitus vel ad F, vel ad L. Si ad F. habetur propoſitum. ſi vero ad L. cum L. gignatur ex G. in ſe compoſitus quoq; erit H. ad G. Quod ſi H. ſit primus, probauimus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

Præterea A, metiatur H, non primus quartum D, qui cum fiat ex F in P, erit H. cõpoſitus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad P, qui quidem fit ex G. in L, erit etiam H, compoſitus vel ad H. vel ad L. Si ad G. habetur propoſitum; ſi vero ad L. cum L. producatur ex G. in ſe; erit quoque H. ad G, compoſitus. Quod ſi H, primus ſit oſtendemus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

Eodem modo ſi H, non primus metiatur vltimum E, oſtendemus H. compoſitum eſſe ad H. Si vero H. primus ſit, eum metiri ipſum G. atque ita in cæteris eadem ſemper erit demonſtratio.

Itaque ſi H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipſum F, vel ad eum compoſitus erit. Si vero H. metiatur vltimum E. metietur idem ipſum G, vel ad eum compoſitus erit. Si denique H. metiatur aliquem præter primum & vltimum, metietur idem vel ipſum F, vel ipſum G, aut ad alterutrum erit compoſitus. Id quod perſpicuum eſt ex ipſa demonſtratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis ſecundo libro Euclides demonſtrauit prioribus 10. theorematibus.

QVoniam ad theorema ſequens demonſtrandum Theon quædam aſſumit in numeris, quæ demonſtrata ſunt de lineis libro ſecundo; perinde ac ſi eadem de numeris eſſent oſtenſa; non alienum inſtituto noſtro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonſtrata ſunt de lineis, hoc loco de numeris demonſtrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis eſt traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in ſecundo libro tenuiſſe conſpicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quot

quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continentur.

Sint duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C in A B; Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem eſſe numeris G H, H I, I K, hoc eſt toti numero G K, ex G H, H I, I K, compoſito. Quoniam enim C multiplicans A B, fecit F; a metietur A B, ipſum F, per C hoc eſt, A B, pars erit ipſius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipſius G H, & D E, ipſius H I; & E B, ipſius I K pars erit à C, denominata, eadem nimirum quæ A B, ipſius F. Quia vero per ea, quæ ad propoſ. 5. lib 7 demonſtrauimus, totus A B totius G K, eadem pars eſt, quæ A D, ipſius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipſius F; b Ac proinde inter ſe æquales erunt F, & G K. Quod eſt propoſitum.

A . . . D . . E . B   C . .
F . . . .
G . . . . . . H . . . . I . . K

a 2. pron.

b 4. pron.

II.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex A B. in A B, nimirum quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex A B, in A C, & in C B, quod eſt propoſitum.

D . . . . . .
A . . . . C . . B

Idem demonſtrabitur, ſi A B, plures partes, quam in duas ſecetur, vt, ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex A B. in A B, nimirum quadratus ipſius A B, æqualis numeris qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex A B, in ſingulas partes A C, C D, D B.

E . . . . . .
A . . . C . . D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui

illi, qui ſub partibus continetur, numero; & illi, qui à prædicta parte efficitur; quadrato.

Sit numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus AC, CB continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC æqualis ſit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex AC, in AB, vel (quod idem eſt) ex AB in AC, æqualis numero facto ex D, hoc eſt ex AC, in CB, & ex D, hoc eſt, ex AC, in AC, quadrato ſcilicet ipſius AC. Quod eſt propoſitum.

D . . . .

A . . . . C . . . . . . B

IV.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

Sit numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex AB, in AC & in CB. Eſt autem numerus, qui fit ex AB in AC per 3. theorema æqualis numero genito ex AC, in CB vna cum quadrato ipſius AC. Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB. Igitur numerus quadratus ex AB factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium AC CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . . C . . . . B

V.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus enim AB ſecetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD DB. Dico numerum ſub partibus inæqualibus AD DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem exceſſus eſt inter dimidium AC, vel BC, & alterutram partium inæqualium AD DB) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius C B, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C D, D B, vna cum plano numero bis comprehenſo ſub C D, D B, numero vero comprehenſo ſemel ſub C D. D B, vna cum quadrato ipſius D B, æqualis ſit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; ſit, vt ſi hic numerus factus ex C B, in D B, ſumatur pro quadrato ipſius D B, vna cum numero facto ex C D, in D B; numerus quadratus ipſius C B, æqualis etiã ſit reliquo quadrato ipſius C D vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, ſemel, & numero ex C B, hoc eſt, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis eſt numerus, qui ſit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipſius C B. æqualis erit quadrato ipſius C D, vna cum numero qui fit ex A D. in D B; hoc eſt, numerus factus ex A D. in D B, vna cum quadrato ipſius C D, æqualis erit quadrato ipſius C B. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . C . . . D . . B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

Numerus enim A B. ſecetur in partes æquales A C, C B, eique adiiciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D. in adiectum B D. vna cum quadrato dimidij numeri C B, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex C B. dimidio & adiecto B D. tanquam vno hoc eſt, quadrato ipſius C D. Cum enim quadratus ipſius C D, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C B, B D, vna cum numero bis comprehenſo ſub C B B D, hoc eſt, quadratis partium C B, B D, vna cum numeris ſub C B, B D. & ſub A C, B D, comprehenſis; numeris autem contentis ſub C B, B D, & ſub A C, B D, & ſub B C, B D, hoc eſt, quadrato ipſius B D, æqualis ſit ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; ſit vt ſi hic numerus factus ex A D, in B D, ſumatur pro quadrato partis B D, vna cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D quadratus ipſius C D, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C B vna cum numero facto ex A D. in B D; hoc eſt, numerus factus ex A D in B D, vna cum quadrato ipſius C B, æqualis ſit quadrato ipſius C D. Quod eſt propoſitum.

A . . . . C . . . . B . . D

Si nume-

VII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis eſt numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

Diuidatur numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB æqualem eſſe numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis ſit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; ſi quadratus ipſius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB. ſimul, æquales quadratis numerorum AC, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, æqualis eſt, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, bis, æqualis eſt, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur ſi pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, bis, ſumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, ſimul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod eſt propoſitum.

A . . . . C . . . . B

VIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

Secetur numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in parte CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualẽ eſſe quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis ſit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compoſiti ex AB, & BD, ſiue dicta parte CB, ſit æqualis per 4. theorem. quadratis numerorum AB, BD, vna cum numero qui fit ex AB in BD, hoc eſt, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum, AB, CB, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC, fit, vt ſi pro quadratis numerorum AB, CB, ſumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cum quadrato ipſius AC, quadratus factus ex AD, æqualis ſit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod eſt propoſitum.

A . . . . C . . . B . . . D

Si nume-

IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Diuiſus ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorum, qui ex A C dimidio, & ex C D numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B,) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D æqualis ſit, ex

A . . . . C . . . D . . B

4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cũ numero bis, qui fit ex A C, in C D: Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipſius D B, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur, ſi pro quadrato ipſius D B, una cum eo, qui fit bis ex C B in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis. Ac propterea quadrati partium A D, D B, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitum.

X.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

Sit numerus A B, diuiſus in partes duas æquales A C, C B, eique adiiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compoſiti ex toto A B, & adiecto B D, & quadratũ adiecti numeri B D, utroſque ſimul, duplos eſſe quadratorũ, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compoſito ex C B, dimidio, & adiecto B D.

A . . . C . . . . B . . D

Cum enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D, ſi communis addatur quadratus partis B D, erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D,

una

una cum numero bis, qui fit ex CB in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipſius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt quadrati numerorum CB, CD; & quadrato ipſius CB, æqualis eſt quadratus ipſius AC. Igitur ſi pro quadrato ipſius BD, una cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, ſumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc eſt, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

Iam vero theorema 11. lib. 2. non poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, ut numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita ut numerus planus, qui ex toto in unũ partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, ut ibi monuimus, ita demõſtrabimus.

Diuidatur, ſi fieri poteſt, numerus AB, in C, ita ut numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus ſub extremis AB, CB, æqualis eſt quadrato numeri medij AC;



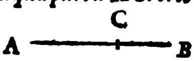
a erit ut AB ad AC ita AC, ad CB: Eſt autem AB maior quam AC, ita AC. Igitur & AC, maior eſt quam CB. a 10. ſep.

Ablato iam CD, qui ipſi CB ſit æqualis, erit quoq; ut AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, eſt ut AC, ex toto AB detractus ad CD, ex toto AC, detractum; b erit quoq; ut totus AB, ad totum AC, vel ut detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, reſiduus, hoc eſt, CD ipſi CB æqualis ad AD, ex AC, reſiduum. Quia igitur eſt ut AC, ad CD, ita CD, ad AD; & eſt AC, maior quam CD, erit quoq; CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipſi AD ſit æqualis; erit etiam ut AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaq; quia eſt, ut totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum erit, c quoque ut totus AC, ad totum CD, vel ut detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, reſiduum, hoc eſt DE, ipſi AD, æqualis ad EC, ex CD, reſiduum. Quare cum ſit ut CD, ad DE, ita DE, ad EC; ſit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE maior, quam EC: Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipſi EC, æqualis; & ſic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod eſt abſurdum: cum numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, ut planus numerus ex toto in unam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum.

b 11. ſep.

c 11. ſep.

Aliter. Quoniam numerus AB, in C, ita diuiſus eſt, ut is qui fit ex AB in CB, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC: erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipſius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, una





cum quadrato ipſius A C quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, una cum quadrato ipſius A C, quadratus, quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8 theorem. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater cõtinetur ſub A B C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, ut conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, ut is qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

Verum hoc idem clarius demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.

16. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirum A, B, ſimul ad C; & B C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C.

A, 9.		B, 12.
	C, 16.	
D, 3.		E, 4.

a 24. ſep. — *a* Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; *b* erit & vterq; D, E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaq; cum tam compoſitus ex D, E, quam ipſe D, ad E, primus ſit; *c* erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquam vno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquã vno, in D, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij præcedentis, & numero A facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E; *d* Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

b 30. ſep.

c 26. ſep.

d 27. ſep.

e 30. ſep. — Deinde quia, vt prius, *e* vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D, E; efficitur, (cum tam compoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D,) *f* numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam in E, æqualis eſt per 3. theorem. ſcholij antecedẽtis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt,

f 26. ſep.

B, 12.		C, 16.
	A, 9.	
D, 3.		E, 4.

ſunt, *a* atque adeo & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti. a 27. ſep.

Poſtremo quia, vt prius, *b* vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt: atque adeo è contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, *c* erit quoque qui fit ex D, ad cōpoſitum ex D, E, primus; *d* Ac proinde & idem fit qui ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theorem. antecedentis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt oſtenſum eſt; *e* Erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi ſunt, vt oſtenſum eſt; *f* erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cum igitur ex D, in E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quamobrem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

b 30. ſep. c 26. ſep. d 27. ſe-ptim. e 30. ſe-ptim. f 30. ſe-ptim.

A, 9.		C, 16.
	B, 12.	
D, 3.		E, 4.

SCHOLIVM.

Campanus hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunq; numeris continue proportionalibus minimis hoc modo ipſum proponens.

Si quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

Sint continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſitos, eſſe primos; Videlicet A, B C, ſimul ad D; & A, B D, ſimul ad C; & A, C, D, ſimul ad B; & B, C, D, ſimul ad A. Si enim A, B, C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A, B, C, ſimul, atque D, compoſiti inter ſe; *atque adeo eos aliquis numerus com-*

A, 8	B, 12.	C, 18.	D, 27.	
E ...	F, 2.	G, 3.	H	

munis menſura metietur. Metiatur eos numerus E (ſi fieri poteſt) ſumanturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales ſunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipſorum F, G, vel certe compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G, ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. Atque idcirco ipſum E, & alterum ipſorũ F, G aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaq; cum H metiatur E; &

A.8. B.12. C.18. D.27.
E ---- F.2, G.3. H ----

a 11. pro-nun. *E, ponatur metiri compoſitum ex A, B, C, & ipſum D; a metietur quoq; H, eundem compoſitum ex A, B, C & ipſum D. Quia vero H, metitur quoq; alterum ipſorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propoſ. 2. lib. 8 b metietur quoq; H, medios B, C: c ac propterea & compoſitum ex B, C. Itaq; cum H, metiatur totum compoſitum ex A, B, C, & detractum compoſitum ex B, C, vt demonſtrauimus: d metietur quoq; idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipſum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter ſe compoſiti. e Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur compoſiti inter ſe ſunt compoſitus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter ſe primi.*

b 11. pro-nun.

c 10. pro-nun.

d 12. pro-nun.

e 3. ax.

Rurſus, ſi A, B, D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad C metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E. qui rurſum ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. vel metietur alterum ipſorum F, G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G. Metiatur ergo H, ipſum E, & alterum ipſorum F, G. Itaq; cum H, metiatur E, & E, compoſitum ex A, B, D: f metietur etiam H, eundem compoſitum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipſorum F, G, qui metiũtur, per coroll. 3 propoſ. 2. lib. 8 medios B, C, g metietur quoq; H, ipſos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compoſitum ex A, B, D, & detractum B, h metietur quoq; H, compoſitum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F, G, quorum F, ipſum A, & G, ipſum D, metitur, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. i metietur etiam H alterum ipſorum A, D. k Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter ſe compoſiti. l Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur A, B, D, ſimul compoſiti, ad C, compoſiti ſunt. Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

f 11. pro-nun.

g 11. pro-nun.

h 12. pro-nun.

i 11. pro-nun.

k 12. pro-nun.

l 3. ax.

Non aliter oſtendemus & A, C, D, compoſitos, eſſe ad B, primos: necnon & B, C, D, ſimul ad A. Eademq; ratio eſt de quotlibet numeris continue proportionalibus.

xvij.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

S[int]

Sint primi inter ſe A, & B, Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, *a* atque adeo in ſua proportione minimi; *b* ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum, Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....
B.......
C--------

a 23. ſeptim.
b 21. ſeptim.

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

Sint continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi *c* minimi in ſua proportione. *d* Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A, ipſum B, & D, ipſum E. Atqui eſt vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipſum B; & B, ipſum C, metietur; *e* atque ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipſum C; metietur & C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, *f* metietur quoque ipſum D. Metitur vero & ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E, eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E----

c 23. ſeptim.
d 21. ſeptim.
e 11. pronun.
f 11. pronun.

PROBL. 1. PROPOS 18. xix.

Duobus numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inueniri poſſit tertius ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B, Aut igitur A, B, primi inter

b 16. no. ſe ſunt, aut non. Si ſunt inter ſe primi, *a* perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero nõ

A, 4. B, 7.

ſunt *A*, & B, inter ſe primi; multiplicans *B*, ſe ipſum faciat C, *Aut* igitur *A*, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primum *A*, ipſum C, per D. *D*ico ipſis *A*, B, inueniri poſſe tertium proportionalem, imo ipſum *D*, eſſe tertium proportionalem.

A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.

b 9. pronun. Cum enim *A*, metiatur C, per *D*, *b* fiet C, ex *A*, in *D*: Fit autem ex conſtructione, idem C, ex B, in ſeipſum. Igitur, qui continetur ſub extremis *A D*, æqualis eſt ei, qui ex medio B, deſcribitur; *c* Ac proinde erit vt *A*, ad B, ita B, ad *D*. Quare *D*, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis *A*, B.

c 20. ſeptim.

Sed non metiatur *A*, ipſum C. *D*ico ipſis *A*, B, non poſſe reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri poteſt, inuentus ſit *D*, ita vt ſit *A*, ad B, quemadmodum B, ad *D*. Quoniam igitur eſt, vt *A*, ad B, ita B, ad *D d* erit numerus contentus ſub extremis *A*, *D*, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe ipſum, hoc eſt, ipſi C. Quare cum C, fiat ex *A*, in *D*; *e* metietur *A*, ipſum C, per *D*; ſed & non metiri ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, tertius proportionalis, quando *A*, primus non metitur C, productum ex B, ſecundo in ſe ipſum. Eadem via conſiderabimus, an ipſis B, & *A*, inueniri poſſit alius tertius numerus, ad quem ita ſit *A*, vt B, ad *A*. Duobus ergo numeris datis conſiderauimus, &c. Quod faciendum erat.

d 20. ſeptim.

A, 6. B, 4. *D*--- C 16.

e 7. pronun.

xx. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

Sint dati tres numeri A, B, C, ſiue deinceps proportionales ſiue non, oporteatque conſiderare, an poſſit reperiri quartus ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit C, ad aliquem alium numerum, vt *A*, ad B. Multiplicans *B*, ipſum C, faciat *D*. *A*ut igitur *A*, ipſum *D*, metitur, aut non. Metiatur primum *A*, ipſum D, per E. *D*ico ipſis *A*, *B*, C, inueniri poſſe quartum proportionalem, imo ipſum E, eſſe quartum proportionalem.

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4. *B*, 8. C, 9. E, 18. *D*. 72.

f 9. pronun. Cum enim *A*, metiatur *D*, per E, *f* fiet D, ex *A*, in E: Fit autem idem D, ex *B*, in C, per conſtructionem. Igitur qui ſub extremis *A*, E, continetur, æqualis eſt ei, qui ſub *B*, C, ſecundo & tertio continetur; *g* Ac propterea erit vt *A*, ad *B*, ita C, ad E. Quare inuentus eſt E, ipſis *A*, *B*, C, quartus proportionalis.

g 19. ſeptim.

Sed

Sed iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalem Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A B, C, E, proportionales ſunt, *a* erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi *D*. Quare cum D fiat ex A, in E; *b* metietur A ipſum *D*, per E: ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſiderauimus, an poſſit, &c. Quod erat faciendum.

A, 4 B, 6, C, 9. E---. D, 54,
A, 3. B, 4. C. 10. E---- D, 40,

a 19. ſeptim.
b 7. pronun.

S C H O L I V M.

Hæc quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duob. numeris datis 3, 8, ſi quadratus numerus ſecũdi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$ Quia enim diuiſis 64, per 3. fit numerus 21 $\frac{1}{3}$ producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 $\frac{1}{3}$ per diuiſorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7 tradidimus Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8, in ſe, c erunt 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$ continue proportionales.

Datis autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertium, genitus diuidatur in primũ 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20, 13 $\frac{1}{3}$ Cum enim diuiſis 120. per 9 fiat 13 $\frac{1}{3}$ producetur numerus diuiſus 120. ex multiplicatione Quotientis 13. $\frac{1}{3}$ per diuiſorem 9 ex iis quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autem idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium d. Igitur quatuor numeri 9. 6. 20 13 $\frac{1}{3}$ proportionales ſunt.

c 20. ſeptim.
d 19. ſeptim.

Ex his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus Com-

cus Commandinus, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi. Aut non deinceps quidem proportionales ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidē proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorū extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quo nam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in aliis quidē demonſtrationibus vigilantiſſimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes in errorem eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non eſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nam falſitas huius rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio ſit ſubdupla: Idē videri poteſt in exemplis aliis infinitis, vt hic 2. . . 14 Item 3. 9. 4. 12 Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adiungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalē. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare contendunt, perſpicuum fiet ſi demonſtrationem ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

Sint trium numerorum A, B, C non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter ſe primi. Dico ipſis inueniri nullo modo poſſe quartum proportionalem.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E ---

Si enim poteſt inueniri, ſit ille D, ita vt quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & vt B ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt, A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A, C, inter ſe primi,
a 23. ſeptim. a & ob id minimi. b Igitur metientur æque ipſos C, E, nimirum A, ipſum C, & C, ipſum E, At vero & A, ſeipſum metitur.
b 21. ſeptim. Ergo A, metitur duos A, C, primus inter ſe. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

Hæc eſt eorum demonſtratio, in qua aſſumunt eſſe vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri poſſe, nuſquam demonſtrarunt: Imo hoc ipſum vertitur in dubiū in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris

B, C, D.

B, C, D, quartus proportionalis poſſit inueniri, quam tribus A, B, C, cum non magis hoc conſtet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro conceſſo aſſumant, ut hic idem fieri non poſſe, oſtendant; liquido conſtat, eos petere principium (ut cum Dialecticis loquamur) in demonſtrando. Quin etiã, quotieſcunque quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A, B, C, D; nulla ratione fieri poteſt, ut detur alius ad quem ita ſe habeat quartus ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquam conceſſum atque probatum aſſumunt; quandoquidem ſine probatione ulla exigunt, ut detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, ut B, ſecundus ad C, tertium. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi utuntur.

Sint enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, ſintq; A, & C, primus, & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, ut ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, ſi poteſt fieri, ut B, ad C, ita D, ad E. Eſt ergo ex aequo, ut A, ad C, ita C, ad E; Atq; adeo ut ipſi oſtenderunt, metietur A duos A, & C, primos inter ſe.

A. 4. B, 12. C, 3 D, 9. E----

Quod eſt abſurdum. Non ergo fieri poteſt, ut D, ad E, ſit, quemadmodum B, ad C. Quare apertiſſime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

Primum vero membrum perſpicue & aperte oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; a manifeſtum eſt, ex demonſtratis, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus. a 17. noni.

xxj.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.

Sint propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros. b Sumpto enim numero D, E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei unitas EF. Aut ergo totus DF, primus eſt, aut non primus. ſit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & DF, plures propoſita multitudine A, B, C. b 38. ſeptimi.

A, 2. B, 3. C, 5.

30. 1

D---------E . F

SED iam non ſit primus DF. c Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico, G primum nulli ipſorum c 33. ſeptimi.

A,3.B,5.C,7.
105. 1.
D ——·········· E . F
53.
G·······

A,B,C, eundem eſſe. Si namque, G, ſit idem, qui vnus ipſorum A, B, C; metiantur autem A,B,C, ipſum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, a metietur quoque E F, reliquum, numerus vnitatem. Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui vnus ipſorum A B, C; A: proinde inuenti ſunt primi numeri A.B,C,G, plures propoſita multitudine primorum numerorum A,B,C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, ſi ſumatur minimus, quem ipſi metiantur. &c. Quocirca primi numeri plures ſunt, &c Quod demonſtrandum erat.

a 11. primum.

SCHOLIVM.

Poteſt idem hoc theorema inſtar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propoſitis, inueniri alium primum numerum ab illis diuerſum.

Nam ſi primi quotcunq; propoſiti ſint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuerſum, videlicet D F, ſi primus eſt, vel certe G qui ipſum D E, metitur. Atq; eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinq; primis alium ſextum inueniemus, & ſic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

xxij.

Si pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

Componantur quotcunque pares numeri AB, BC, C D. Dico & totum compoſitum A D, parem eſſe, Cum enim A B, B C, C D, ſint pares, habebunt ſinguli ſingulas partes dimidias, ex definitione Sit ergo E, dimidia pars ipſius A, B, & F, ipſius B C; & G, ipſius C D. Quoniam igitur eſt vt A B, ad E ita BC, ad F; & C D, ad G; (quod ſemper ſit proportio dupla) b erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, ſimul. Eſt autem A, B, ipſius E, duplus. Igitur & totus A D, compoſiti ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compoſitum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.....B ...C.........D
E...F..G....

b 12. ſep.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

xxiij.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares quorum multitudo par A,B,BC,CD,DE. Dico & totum compoſitum A E, parem eſſe. Cum enim A B, B C, C D, D E, ſint impares: differet quilibet vnitate a pari, ex definitione. Quare

A . . . B . . . . . C . . . . D . . . (. . . . . . E

detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. a Quare, & compoſitus ex ipſis par erit. Eſt autem & multitudo vnitatum detractarum par. b Igitur & totus A E, compoſitus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat oſtendendum. a 21. noni. b 21. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

Si impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar: & totus impar erit.

Quotcunque numeri impares, quorum multitudo impar eſt, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum, A D, compoſitum, imparem eſſe. Cum enim impar numerus differat vnitate a pari ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. c Eſt autem & A C, compoſitus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. c 21. noni.

A . . . . . B . . . C . . . . E . D

d Igitur & A E, compoſitus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cum impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod oſtendendum erat. d 21. noni.

SCHOLIVM.

Pari ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par, cũ ex defin. Impar à pari differat vnitate. e Quare reliquus ille par cum alio pari dato, vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rurſus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari ſola vnitate differat. Quod eſt propoſitum. e 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si à pari numero par detrahatur. Et reliquus par erit. xxv.

Ex pari numero A, B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem eſſe, Aut enim C B, par detractus dimidia pars eſt ipſius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor.

A . . . . . . C . . . . . . B

Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipſi C B, pari æqualis ſit A C, reliqua pars dimidia, erit & A C, numerus par.

Sed iam C B, par detractus maior ſit, vel minor dimidia parte ipſius. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimi-

dias

dias partes habent. ex definitione, ſit D B. demidia pars ipſius A B, & E B, dimidia ipſius C B Itaque cum ſit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium, erit permutando vt A B, ad C B, ita D, B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad C B, ita D E, ad E B Rurſuſque permutando, vt A C, ad D E, ita C, B, ad E B. Atqui C B, ipſius E B duplus eſt. Igitur & A C, ipſius D E duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, ſit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c Quod erat oſtendendum.

A......C.. D. .E.... B

A...... D... C.. E.. B

S C H O L I V M.

Facilius demonſtrabimus hanc pr poſ. ducendo ad impoſſibile, hoc modo Si A C, reliquus non dicatur par, ſed impar; detracta vnitate A D, erit reliquus D C par. a Igitur cõpoſitus D B, par quoque erit: ac proinde, addita vnitate A D, totus A B, impar fiet, quod eſt abſurdum, cum par ponatur.

A..D... C...... B

a 23. no ni.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

xxvj.

Si à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus ſit numerus D B par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; b erit & reliquus A D; par, Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, & c. Quod demonſtrandum erat.

A....... C. D.... B

b 24. no ni.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

xxvij.

Si ab impari numero impar detrahatur; Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem eſſe. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A, D, par auferetur C D; c erit & reliquus A C, par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C ......D. B

c 24. no ni.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

xxviij.

Si ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex

Ex impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem eſſe. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par. Ex quo cum detrahatur C B, par; *a* reliquis D C, par quoque erit: A: proinde addita vnitate AD, net AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat. a 24. noni.

A . D . . . . C . . . . . . B

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Fiat ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot in A, ſunt vnitates. Quare cum B, ſit par, componetur C, ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot ſunt vnitates in A; *b* Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat. b 21. noni.

A . . . B . . . .
C . . . .

SCHOLIVM.

Eadem demonſtratione oſtendemus & hoc.

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

Nam rurſus C, componetur ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . .
C . . . .

COROLLARIVM.

Conſtat quoque ex his, Parem numerum in ſe multiplicatum procreare parem: vt patet, ſi pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; Factus impar erit.

Ex impari A in imparem B fiat C. Dico C, imparem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot ſunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, ſit impar: componetur C, ex imparibus ipſi B, æqualib. quorũ multitudo impar eſt, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. *c* Igitur C, impar erit. Quocirca ſi impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum. c 23. noni.

A . . . . B . . . . .
C . . . .

COROL-

COROLLARIVM.

A... B...
C.........

Hinc ſequitur, Imparem numerum in ſe multiplicatum gignere imparem: vt conſtat, ſi impares A, & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

A... C....
B.............

Metiatur impar A, parem B, per C. Dico C parem eſſe. Nam ſi impar ſit; a erit B factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod eſt abſurdum, cum ponatur
a 29. noni.
par. Eſt ergo C, par.

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

A... C.....
B ....

Metiatur impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem eſſe. Si enim ſit par; b erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod eſt abſurdum, cum impar ponatur.
b 28. noni.
Eſt ergo C, impar.

SCHOLIVM.

Ex his clariſſime quoq; demonſtrabimus theorem. 11. lib. 2. numeris non poſſe accommmodari: Id quod etiam in ſcholio propoſ. 14. huius lib. aliter oſtendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonſtraturos. Secetur enim, ſi fieri poteſt, numerus AB, in partes AC, CB, ita vt numerus ex AB, in CB, factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur vtraq; pars AC, CB, impar eſt; aut maior AC impar, & minor CB, par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar: aut deniq; vtraq; pars AC, CB, par Sit primum vtraq; pars AC, CB, impar, c ideoq; totus numerus AB, par. d Igitur qui fit ex AB, in CB, par eſt: qui vero ex AC, in ſe fit, impar eſt, ex Coroll. huius propoſ. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex AC, in ſe; erit par numerus impari æqualis, quod fieri non poteſt.

A---- C --- B
D--- E --

c 22. noni.
d 28. noni.

Deinde ſit AC, impar, & CB, par, ideoq; ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus AB, impar. e Quia ergo numerus ex AB, impare in parem CB, factus par eſt: & numerus ex impare AC, in ſe genitus, impar, ex coroll. huius propoſ. 29. erit rurſus ille par huic impari æqualis: quod eſt abſurdum.

e 28. noni.

Tertio ſit AC, par, & CB, impar, ideoq; ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus AB, impar. f Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar eſt: & numerus ex pare AC, in ſe genitus, par, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. erit rurſus ille par huic impari æqualis: quod eſt abſurdum.

f 29. noni.

Quarto

Quarto ſit vtraq; pars AC CB, par. Inuentis igitur, ex ſcholio propoſ. 35 lib. 7. duobus numeris minimis D E, proportione AC, ad CB; a erunt D E, inter ſe primi: ac proinde ambo pares non erunt, ſed vel vterq; impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia eſt, vt a 24 ſep.
AC, ad CB, ita D ad E; b erit conuertendo, vt CB, ad AC, ita E, ad D: Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D: c Eſt au- b 26. ſep.
tem, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; quod numerus factus ex AB, c 20 ſep.
in CB, æqualis ponatur quadrato medij AC Igitur erit quoq; vt totus DE, ad D, ita D, ad E, d ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, d 20. ſep.
in E, æqualis erit quadrato ipſius D. Totus ergo numerus DE, ſectus eſt in partes D E, quarum vel vtroq; impar eſt, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE in partem E, æqualis ſit quadrato alterius partis D, quod fieri non poſſe tam demonſtratum eſt in numero AB, quando vtraq; pars AC, CB, vel impar eſt, vel vna impar, & altera par. Conſtat ergo propoſitum.

THEOR. 20. PROPOS. 30. xxxiij.

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

Metiatur impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipſius B metiri. Metiatur A ipſum B, per C. Erit ergo ex iis, quæ ex antecedente propoſ. ex Campano demonſtrauimus, numerus C, par, atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A, metiatur B, per C, e metietur quoque C, ipſum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam vero eſt vt C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B. Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, vt oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſis C, dimidij ipſius B, pars ab eodem A, denominata. f Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum. e 8. pron. f 40. ſep.

A . . .   C . . . .
B . . . .

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiv.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit.

A . . . . . B . . . .
C . . . . D . . . .

Impar numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoq; primum eſſe. Si n. A C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D, qui neceſſario impar erit. Nam ſi ſit par, cum metiatur

a 28. noni. tur imparem A: *a* erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, impar.

A..... B........

C................ D----

Quare D, impar parem C, metiẽs, (eſt enim C, par, cum dimidium

b 30. noni. habeat B) *b* metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe metitur Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt. Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Sequitur hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus eſt, primum quoque eſſe non ſolum ad eius duplum, vt Euclides demonſtrauit, ſed etiam ad eius quadruplum; octuplum, ſedecuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam ſi primus

c 31. noni. eſt ad duplum, *c* primus quoq; erit ad quadruplum, qui dupli duplus eſt: Et ſimiliter ad octuplum, qui quadrupli duplus eſt, &c.

XXXV. THEOR. 30. PROPOS. 32.

Numerorum à binario duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tantum.

Numeri á binario A, dupli quotcunque ſint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, eſſe pariter pares tantum. Quod enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt. Nam

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

expoſita vnitate, cum A, ſit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales nimirum in proportione dupla. *d* Quare A, quemlibet ipſo-

d 11. noni. rum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem ſequẽtem metietur per aliquem ipſorum A, B, C, D, E: qui cum omnes ſint pares, vtpote dupli á binario: metietur quemlibet ipſorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem: A: propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Quod autem iidem numeri ſint pariter pares tantum, liquido etiam conſtat. Cum enim A, B, C, D, E, ſint ab vnitate continue proportionales, ſitque A proximus vnitati numerus primus, nimi-

e 13. noni. rum binarius: *e* nullus alius quemlibet ipſorum metietur, præter ipſos A, B, C, D, E; qui cum ſint omnes pares, metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par eſt tantum. Numerorum igitur á binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui ſint pariter pares tantum. Sint n. A, B, C, D, E, F. à bina-

à binario dupli, qui ex hic demonſtratis omnes ſunt pariter pares tantum.

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.
I--- H--- G---

Dico nullum alium eſſe pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atq; adeo ſi ordo numerorum à binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri poteſt, ſit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia ſit H. Erit igitur H, numerus par, (Nam ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars dimidia; metietur binarius numerus par, ipſum G, per H, numerum imparem; Atq; adeo G pariter impar erit. Quod eſt abſurdum: ponitur namq; pariter par tantum) cuius rurſum dimidia pars ſit I. Erit igitur rurſum I, par numerus: (Nã ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipſum G, per I, numerum imparem: Atque ob id G, pariter impar erit: Quod eſt abſurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atq; ita deinceps erit ſemper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipſius I, dimidia pars vnitas, ita vt ſit I, binarius. Igitur H, G, ſunt à binario I, dupli. Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipſorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non eſſe. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius pariter par eſt tantum, præter eos qui à binario ſunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33. xxxvj.

Si numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar eſt tantum.

Habeat numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, eſſe pariter imparem tantum. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem; metietur binarius numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt. Quod autem idem A, ſit pariter impar tantum, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſius A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantum; ipſe erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. a Igitur fit A, ex D, in E: ſed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium: b Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D: Igitur & E, ipſum B, metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum, Non eſt ergo A, pariter par. Ergo pari-

A . . . .

A . . . .
B . . . . . C . .
D ---- E ----

a 9. præ-nun.
b 19. ſep.

pariter impar tantum. Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Itaq; ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, inuenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum ſit pariter impar tantum, conſtat ex hac propoſitione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem.

Impares	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

Quod autem illi ſoli ſint pariter impares tantum, perſpicuũ erit ex ſequenti theoremate, in quo demonſtratur, omnes pares, qui nec à binario ſunt dupli, neq; dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum, manifeſtum eſt, nullum alium præter ipſos, eſſe pariter imparem tantum; ſed vel eſſe pariter parem tantum, vel certe pariter parem, & pariter imparem.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

xxxvij. **Si par numerus neque à binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.**

Par numerus A, neque ſit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, ſed parem. Dico A, & pariter parem eſſe, & pariter imparem. Quod enim ſit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par eſt.

A . . . .

Quod autem idem A, ſit etiam pariter impar, ita oſtendemus. Diuiſo A, bifariã, & eius dimidio rurſus bifariam, & ita deinceps: tandem incidemus in aliquem imparem. Nám ſi in binarium incideremus, eſſet A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod eſt abſurdum Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipſum A, per numerum parem: Alias ſi per imparem me-
5. 3. no- tiretur, cum impar imparem multiplicãs faciat imparem; eſſet A,
[illegible] factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod eſt abſurdũ. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo viciſſim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur eſt & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus ſit, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

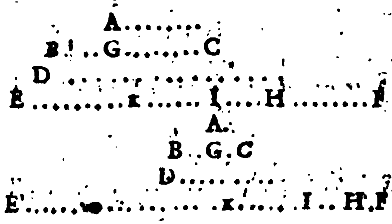
Facile ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares ſunt, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario ſunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propoſ. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

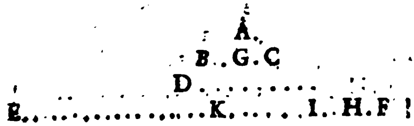
Porro ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9 lib. 7. ſcripſimus.

THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxvii.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo: Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F, & ex B C, ſecundo, & E F, vltimo detrahantur G C, F H, primo, *A*, æquales. Dico eſſe vt B G, ad A, ita E H, ad *A B C*, & D, ſimul. Detrahatur FI, ipſi B C, & FK, ipſi D, æqualis. quoniam igitur F I, æqualis eſt ipſi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero eſt vt *A*, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque eſt E F, ipſi D, & I F, ipſi B C; &





H F, ipſi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F & I H, ad H F; & A: proinde ita etiam erunt omnes F K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc eſt, totus E H, ad D B C A, ſimul. (quibus ſumpti ſunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc eſt, vt B G, ad A; ſunt enim B G, & A, ipſis I H, & H F, æquales. Quare ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat. a 12. ſep. prim.

SCHO-

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam ſummæ quotcunque numerorum continue proportionalium, ſi modo primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim ſit vt exceſſus ſecundi ad primũ, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes: Si primus à ſecundo, & vltimo dematur, fiatq; vt reliquus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium. Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota ſumma. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecũdi: vt liquet ex ſcholio propoſ. 19. huius lib. quandoquidẽ tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus eſt, ſunt exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus vltimi: Vt in exemplo appoſito ſi primus numerus, nimirum vnitas detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo: erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 1. ita 2186. ad ſummam omnium, excepto vltimo, ſi ſecundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui ſi diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187 qui ſi addatur ſumma inuenta 1093 procreabitur ſumma omnium 3280.

1.3.9.27.81.243.729.2187.

xxxix. **PROBL. 34. PROPOS. 36.**

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

Sint ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, eſſe numerum perfectum. Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſecundo in E, tertium: Factus eſt autem F; ex D, in E igitur idem F, fiet ex A, in I; ideoque I, ipſum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipſius

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ---- 62 H, 124. I, 248 F ------- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 485.
O----- P----

a 14. ſeptim. b 7. pro. vnn.

E, ipſius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli ſunt.
Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E,
æquales, ſintque reliqui exceſſus M, N. *a* Erit igitur vt M, ad E, ita a 35. noni
N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E, (Cum enim
G, duplus ſit ipſius E, ablatuſq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus
M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E G, H, I, ſimul.
Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt i-
pſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & *A*. B, C, *D*, nu-
meris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis)
erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & nu-
meris A, *B*, C, D, E, G, H, I, ſimul. Quare cum vnitas, & omnes

Vnitas. A, 2. B, 4 *C*, 8. *D*, 16.
E, 31. G----62, G, 124. I, 248. F---- 496.
K, 31. M, 31. L, 31, N, 465.
O------, P----

numeri, *A*, B. C, D, E, G, H, I, metiantur ipſum F; (Cum enim F fa-
ctus ſit ex E, in *D*; *b* metietur D, ipſum F; *c* atque adeo eundem b 7. pronun.
F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, *d* qui ipſum *D*, metiuntur.
Rurſus cum I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, *e* metientur quo- c 11. pronun.
que eundem F, numeri E, G. H, *f* qui ipſum I, propter proportio-
nem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, matia- d 11. pronun.
tur, vt mox oſtendemus: Erunt vnitas & numeri *A*, B, C, D, E G,
H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis o- e 11. pronun.
ſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

Quod autem nullus alius numerus, præter *A*, B, C, D, E, G, H, f 11. noni.
I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt,
alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; *g* atque adeo F, g 9. pronun.
fiat ex O, in P; Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo
numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, ter-
tium: *h* ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, h 19. ſeptim.
cum A, B, C, *D*, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vni-
tati primus, *i* vltimum D, nullus alius præter A, B, C, metitur; & i 13. oct.
O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; non metie-
tur O, ipſum D. Vt autem O, ad *D*, ita erat E, ad P; neque igitur
E, ipſum P, metietur. Cum ergo E, primus ſit, *k* erunt E, & P, inter k 31. ſeptim.
ſe primi; *l* ideoque in ſua proportione minimi: *m* Ac proinde æ-
que metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. *n* Nullus vero alius præ- l 23. ſept.
ter A, B, C, ipſum *D*, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſo- m 21. ſeptim.
rum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B, C, *D*, tot ab E,
ſumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita F, ad n 13. oct.
H; *o* Ac proinde idem numerus fiet ex *B*, primo in H, quartum, o 19 ſeptim.
qui ex *D*, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex *D*, in E, æqualis

fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, &
19. ſeptim. atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B;
Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum. ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earũ partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam ſummam colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod ſi ab illo primo qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continue dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cũ ipſa vnitate omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facile ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1. 2 primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus; cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. Item, quia compoſitus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habẽs has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

Denique quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

Lubet hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam proportionalitatis Geometricæ, quarum titur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, expoſuimus, hinc exordientes.

I.

Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.

NVMERVS enim A. diuiſus per B, C, faciat Quotientes D, E.
A, 48. *Dico eſſe, vt B, ad C. ita E, ad D. Quoniam enim*
B, 8. C, 3. *diuiſo A. per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, vt*
D, 6. E, 16. *ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem*
[illegible] *A, fiet*

A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium: a erit vt B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum. a 19. ſep.

II.

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erũt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.

Diuiſo enim numero A, per B, C D, E, ſint Quotientes F G H, I. Dico eſſe vt B, ad C, ita G ad F Et vt C, ad D, ita H ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate primo, proxime demonſtrato. Cum enim duo B, C diuidentes

	A, 48.		
B, 3.	C, 4.	D, 8.	*E*, 6.
F, 16.	G, 12.	*H*, 6.	*I*, 8.

A, faciant F, G, erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H Atque ita deinceps, ſi plures fuerint. Quod eſt propoſitum.

III.

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales.

Diuiſo enim numero A, per B, C, D, E, continue proportionales ſint Quotientes F, G H I Dico I H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continue proportionales eſſe Quoniam enim per 2 theorema eſt, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C ad D, hoc eſt, vt D, ad

	A, 15.		
B, 1.	C, 2.	D, 4.	E, 8.
F, 15.	G, $7\frac{1}{2}$.	H, $3\frac{3}{4}$.	*I*, $\frac{7}{8}$.

E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc eſt, vt C, ad D, & D, ad E ita G, ad F: erũt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.

IV.

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

Sint quotuis numeri A, B, C, quorum ſumma D Et totidem alij E, F, G, quorum ſumma H, ſitq; vt A, ad B, ita E, ad F. & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim, ita H, ad E, F, G, ſigillatim.

A, 3.	B, 6.	C, 20.
	D, 29.	
E, 6.	F, 12.	G, 40.
	H, 58.	

Cum enim ſit, vt A, ad B ita E ad F erit componendo, vt A. B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur vt ex æquo A, B, ſimul, ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt H, ad G.

Quia igitur, vt D, ad C ita H, ad F. Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D ad B, ita H. ad F.

Denique quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E, erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E, quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

Nam vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſumma priorum ad primum, quæ ſumma poſteriorũ ad primum, ac proinde vtriuſq; proportionis idẽ denominator erit. Cum ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis, idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quæq; per ſuum, diuidatur. Eademque ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

VI.

Si ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotiẽtes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem Quotientes ordine conuerſo.

Sint continuè proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotiẽtes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, æquales eſſe; Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A B C, D. Et quotientes L M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F G. H I, hoc eſt, eand̄ eodem ordine, quam numeri A B, C. D: erit per 4. theorema, E ad A, vt K. ad I. Quare cum ex diuiſione antecedẽtis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idẽ Quotiens ex diuiſione E. per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N, H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8.
E, 15.
F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.
K, $28\frac{1}{8}$.
L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $\frac{1}{2}$. O, 15.

VII.

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

Sint primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D E, F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotiẽtes H, I, K, L, M. N, quorum ſumma O. Dico ſumma O, æqualem eſſe numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L.

A, 1 B, 2, C, 4. D, 8. E, 16. F, 32.
G, 63.
H, 63. I, $31\frac{1}{2}$. K, $15\frac{3}{4}$. L, $\frac{7}{8}$. M, $3\frac{15}{16}$. N, $1\frac{31}{32}$.
O, $114\frac{1}{2}$.

Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M N, ſunt cõtinue proportionales conuerſo ordine in proportione A ad B, erit N, ad M, vt I, ad H. a Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in a 19. ſep.
I, hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor ſumma O, diuiſa per H, I, K, L, M, N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N, producetur ſumma O, ex H, in N, per deſi. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

Sint deinde quotuis numeri multitudine impares continue pro-

portionales A,B C D E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotiẽtes G,H,I,K,L, quorum ſumma M. Dico ſummã M æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in ſeipſum. Quod enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde vero

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16.
F, 31.
G, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{15}{16}$.
M, 60. $\frac{1}{16}$.

20. ſeptim. quia tres numeri H,I,K. continue proportionales ſunt, æqualis erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M æqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur. quod eſt propoſitum.

Hinc fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientem eſſe numerum quadratum, cuius latus, ſiue radix, eſt medius terminus.

Itaq; ſi inueniendi ſunt quotcunq; numeri continue proportionales in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex primo in vltimũ gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant: accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quicunq; continue proportionales, quot requiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim diuidatur; erunt Quotientes quæſiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderẽtur quotuis numeri multitudine impares, quorũ ſumma ſit numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione totidẽ numeri cõtinue proportionales, eorumq; ſumma per eos ſigillatim diuidenda. Quotiẽtes enim erunt numeri quæſiti, vt ex eod. hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile ſane eſt, poſſe reperiri quotcunq; numeros continue proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma æqualis ſit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis; & deniq; ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſe ipſum multiplicato.

Sic etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero producto ex vno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunque, eorumq; ſummam per vtrumq; diuidat. Quotiẽtes enim dabunt numeros quæſitos, vt oſtenſum eſt: quia videlicet eorum ſumma æqualis eſt numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; ſumma 11. per vtrumque diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $1\frac{1}{5}$. ſunt numeri quæſiti. Habent enim

vtror-

proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

Sint duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem & numerator C, ſit vnitas. Dico ita eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quod minutia A B, diuidetur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot vnitates ſunt in A, ita vt quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B.

A, 6.	C, 1.
B, 11	B, 11

Igitur eadē pars eſt vnitas C numeri A, quæ minutia C B, minutiæ A B; ac proinde eſt, vt vnitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A, B: Et conuertendo, ita A, ad C numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum. 129. de fin.

Quoniam vero minutiæ ſunt fractiones ſiue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuſpiam numeri, (Neque enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant eas reſpectu ſolius vnitatis eſſe accipiendas, propterea quod falſo putant, earũ demonſtrationes nō poſſe omnes explicari in numeris integris, ſed ſolũ in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſuis etiã numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarũ demonſtrationes numeris integris explicare vt exemplis etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes, quas afferimus.

Sint ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$ *&* $\frac{1}{11}$ *particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius* $\frac{1}{11}$ *eſt 4. &* $\frac{6}{11}$ *ſunt 24. perſpicuum eſt, ita eſſe 4. ad 24. vt eſt numerator 1 ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4 vt 6. ad 1.*

Hanc porro propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. in vniuerſum de quibuſcunque duabus minutiis eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denominatorem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia.

Sit minutia quacunque A, B. Dico eſſe numeratorem A, ad denominatorem, B, vt eſt minutia A B, ad ſuum integrum Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D. aqualis ſit eidem denominatori B, ita vt ſuo integro ſit aqualis Quando enim numerator denominatori eſt aqualis minutia ſuo integro aquiualet, quippe qua tot particulas integri contineat, in quot ipſum integrum diuiſum eſt, ac proinde totum integrum contineat,

A,3. C,1. D,5.
B,5. B,5 B,5

a 1. huius. a *Quoniam igitur eſt, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex aquo vt A, ad D, hoc eſt, vt numerator A, ad denominatorem B, ipſi D, aqualem ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc eſt, ad indegrum. quod eſt propoſitum.*

Aliter. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia ſit pars aliquota integri C, ſiue C, ſit vnitas, ſiue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutia ipſi A B, aquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas eſt in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A ſit pars numeri B, ab ipſo B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7 ſcripſimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, qua minutia A B. integri C. b *Quare erit, vt, A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod eſt propoſitum.*

A,1. D,1.
B,5. C,30.

b 20. defin.

DEINDE non ſit Vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutia A C, c *Et quia eſt vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonſtrauimus; erit ex aquo, vt A, ad B numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod eſt propoſitum.*

c 1. huius.

A,3. D,1. C,1.
B,5. B,5. C,30.

Itaque ſi data minutia $\frac{3}{5}$ *ſit huius numeri integri 30. erit eius* $\frac{1}{5}$. *numerus 6. ac proinde* $\frac{3}{5}$. *numerus 18, vbi vides ita eſſe 18. ad 30. vt eſt 3, ad 5, numerator ad denominatorem.*

III.

Minutia quælibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata.

Sit quælibet minutia A B, Dico eam eſſe partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. d *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, nume-*

d 2. huius.

B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad ſuum integrum C, erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum. Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cũ ergo integrum C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore B:) ab ipſo denominatore B, denominata (Cum enim æque metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrũ toties acceptum, quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoq; integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore) erit quoq; minutia A B, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties eſt vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod eſt propoſitum.

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

Ponatur minutia $\frac{3}{5}$, eſſe huius integri 30 cuius $\frac{3}{5}$ ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$ ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinq;) liquido conſtat, 18. eſſe quintã partem numeratoris, hoc eſt triũ vnitatum, quarum quælibet numerũ integrum 30. ſignificat; quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquã, à denominatore 5. denominatã; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt. quinque, vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque vnitates conſtituunt 150. pars, inquam, à denominatore. 5 denominata.

IV.

Datæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

Quod prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutiis, quarum altera numeratorẽ habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B ad minutiam C B, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. a Quia enim eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum E. vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B: (Nam b cum ſit, vt C, ad B, ita minutia C B ad integrum, erit conuertendo, vt B ad C, ita integrum ad minutiam C B,) erit ex æquo, vt A, numerator ad C numeratorem ita minutia A B, ad minutiam C B, quod eſt propoſitum.

A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

a 2. huius.

b 2. huius.

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}\frac{3}{7}$. ſint huius integri 28. cuius $\frac{6}{7}$. ſunt 24. & $\frac{3}{7}$. ſunt

& ſunt 12. vbi perſpicuum eſt, ita eſſe 24. ad 12. vt eſt numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem.

Sint duæ minutiæ A B. C D: Et ex A, in D, fiat F & ex C, in B, fiat G. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C D, vt eſt F, ad H.

F, 10. G. 12.
A, 2. C. 4.
— × —
B, 3. D, 5.
H, 15.

a 18. ſeptim.
b 2. huius.

Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt, F H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, b ita eſt minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H. Rurſus quia C D, multiplicantes B, faciunt G H; c erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita eſt integrum ad minutiam C D. (Nam d cum ſit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit conuertendo vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam C D. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D. quod eſt propoſitum.

c 18. ſeptim.
d 2. huius.

F.	A B.
H.	Integrum.
G.	C D.

Si duæ minutiæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$. ſint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiuſdem, 24. Perſpicuum autem eſt, ita eſſe 20. ad 24. vt 10 ad 12. qui duo numeri procreati ſunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

Itaque ſi productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: ſi minor, minor. Et ſi maior, maior: propter eandem proportionem F ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc eſt demonſtratio regulæ quam in Arithmetica dedimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum maior ſit.

VI.

Integrum ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus, ad ſummam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

Sint

Sint duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C in B fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummam minutiarum AB, CD ut eſt H, ad ſummam numerorum F, G. a Quoniam enim eſt, ut minutia AB ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, ut ſumma minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Ut autem minutia CD, ad integrum, ita eſt G, ad H, nam b ut minutia CD, ad integrum, ita eſt C, ad D. (Et ut C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quod G D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, in H.) Igitur ex æquo erit, ut ſumma minutiarum AB, CD, ad integrum, ita ſumma numerorum F, G, ad H. Et convertendo, ut integrum ad ſummam minutiarum AB, CD ita H, ad ſummam numerorum F, G, quod eſt propoſitum. a 5. huius. b 2. huius. c 12. ſepti.

F, 10.		G, 12.
A, 2.		C, 4.
—	✕	—
B, 3.		D, 5.
	H, 15.	

AB,	CD,	F. G.
	CD.	G.
Integrum.		H.

Sint rurſus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$. ſunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem 24. ac proinde ſumma minutiarum 44. Vbi vides, ita eſſe integrum 30. ad hanc ſummam 44. ut eſt 15 ex denominatoribus productus ad ſummam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit ut prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris.

Habeant duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A: Dico ita eſſe minutiam AB ad minutiam AC, ut eſt denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B facit D, E; d erit ut D, ad E, ita C, ad B. Ut autem D, ad E, e ita eſt minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, ut C, ad B. quod eſt propoſitum. d 17. ſept. e 5. huius.

D, 105.		E, 35.
A, 5.		A, 5.
—	✕	—
B, 7.		C, 12.

Duæ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. ſint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. ſunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiuſdem 10. Manifeſtum autem eſt, ita eſſe 30. ad 10, ut poſterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores

eandem

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

Sint duæ minutiæ AB, CD, ſitq; eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales eſſe: a *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B ita ponitur C, ad D; erit quoq; minutia AB, ad integrũ, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo ſunt minutiæ AB, CD. quod eſt propoſitum.*

a 2. huius.

$$\frac{A,3.}{B,4.} \quad \frac{C,9.}{D,12.}$$

Sed ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico eſſe, vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales ſint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum: b *Eſt autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B, Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D: quod eſt propoſitum.*

b 2. huius.

Deinde ſit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem eſſe minutiam AB, quam CD. c *Cum enim ſit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoq; maior proportio minutiæ AC, ad integrum quam minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo eſt minutia AB, quam minutia CD, quod eſt propoſitum.*

c 2. huius.

$$\frac{A,3.}{B,4.} \quad \frac{C,2.}{D,3.}$$

Verum ſit iam minutia AB, maior, quã minutia CD. Dico maiorem eſſe proportionem A, ad B, quã C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrũ, quam minutiæ CD minoris ad idem integrum. d *Cum ergo ſit, vt minutia AB, ad integrum ita A, ad B: & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod eſt propoſitum.*

d 2. huius.

Minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. integer numerus ſit 24. cuius tam $\frac{3}{4}$. quam $\frac{9}{12}$. ſunt 18. ac proinde æquales ſunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. eiuſdem numeri 24. ſunt 16. vbi manifeſtum eſt, numerum 18. maiorem eſſe numero 16. Ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem eſſe minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem

tem numerator; maiorem proportionem habet, illa maior eſt: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

SINT dua minutia AB, CD, ſitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipſas æquales eſſe. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: a ac proinde minutia æquales erunt. quod eſt propoſitum. a 8. huius.

A, 6.	C, 2.
B, 9.	D, 3.

SED ſint iam minutia æquales AB, & CD. Dico ita eſſe, A, ad C, vt B, ad D. b Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod eſt propoſitum. b 8. huius.

DEINDE ſit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem eſſe minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D, c ac propterea maior erit minutia AB, quam CD. quod eſt propoſitum. c 8. huius.

A, 6.	C, 3.
B, 9.	D, 5.

VERVM ſit iam minutia AB, maior quam CD. Dico maiorem proportionem eſſe A, ad C, quam B, ad D. d Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod eſt propoſitum. d 8. huius.

SINT dua minutia $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$ partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc eſt, 60. æqualem eſſe minutiæ $\frac{2}{3}$. id eſt, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id eſt, 60. maiorem eſſe minutia $\frac{3}{5}$. hoc eſt, numero 54.

X.

DVAS minutias diuerſarum denominationum ad alias duas eiuſdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutia AB, CD, habeant diſſimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D, & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, eſſe æquales minutiis AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; e erit vt A, ad B, ita E, ad G. f Quare minutia AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, g erit vt C, ad D ita F, ad G. h Igitur minutia CD, FG, æquales erunt. quod eſt propoſitum.

e 18. ſep. f 8. huius. g 18. ſeptim. h 9. huius.

E, 10.		F, 9.
A, 2.		C, 3.
B, 3	✕	D, 5.
	G, 15.	

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum reducendum ad minutiam cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam BC, unitati A, æqualem eſſe. a Quia enim eſt, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Eſt autem B, ipſi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id eſt, vnitati, erit æqualis quod eſt propoſitum.

B, 6.	
A, 1.	C, 6.

a 2. huius.

DEINDE ſit integer numerus A revocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A, æqualem eſſe. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitati æqualis, quoties vnitas eſt in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarũ AD, BC numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, b ipſæ inter ſe æquales erũt. Quare cum minutia AD, ſit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui eſt vnitas; erit quoque minutia BC, eidem integro A, æqualis eſt propoſitum.

A, 7.	B, 42.
D, 1.	C, 6.

b 8 huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par eſt, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam eſſe minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, CB, eundem habeant denominatorem; c erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB minutia ad minutiam. Eſt autem C, ipſius A, duplus ex conſtructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit, quod eſt propoſitum.

A, 3.	C, 6.	A, 3.
B, 8.	B, 8.	D, 4.

c 4. huius.

RVRSVS quia minutiæ AB, AD eundem habent numeratorem; d erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Eſt autem B, ipſius D, duplus, per conſtructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit, quod eſt propoſitum.

d 7 huius.

DEINDE dimidianda ſit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A. Vel numerator A, quando par eſt, dimidietur, vt fiat numerator D manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam AC, DB, dimidium eſſe minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, AC, eundem habeant numeratorem; e erit vt B, ad C, denominator ad denominatorẽ, ita AC, ad AB, minutia ad mi-

A, 6.	A, 6.	D, 3.
B, 11.	C, 22.	B, 11.

e 7. huius.

ad minutiam. Cum ergo B. ſit per conſtructionem ipſius C. dimidium; erit & minutia A C. minutiæ A B. dimidium quod eſt propoſitum.

RVRSVS *cum minutiæ A B. D B, habeant eundem denominatorem; erit vt D, ad A, numerator ad numeratorē, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, ſit ipſius A, dimidium, ex conſtructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium, quod eſt propoſitum.* a 4. huius.

EODEM *modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. ſi vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodē manente denominatore; vel (quando fieri poteſt) ſi denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.*

SIC *etiam data minutia ſumetur pars tertia, quarta, &c. ſi denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodē numeratore vel (quādo fieri poteſt) ſi numeratoris tertia pars, quarta, &c. ſumatur. Quod eodem modo demonſtrabitur.*

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT *enim A B, minutia minutiæ C D, reſpectu integri numeri E, ſiue vnitatis E. & valorē huius minutiæ minutiæ exprimat ſimplex minutia K. Fiat F, ex A, in C & G, ex B in D. Dico datā minutiam minutiæ æqualem eſſe ſimplici minutiæ F G, reſpectu integri E, cuius videlicet numerator F & denominator G. Fiat enim rurſus H, ex C, in B. b Et quoniam eſt vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuū integrum, nimirum ad minutiā C D, cuius integrum eſt E: c Item vt A, ad B ita eſt F, ad H, quod A, B, ipſum C, multiplicantes faciant F H. Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F ad H. Rurſus quia eſt, vt C, ad D, ita minutia C D ad ſuum integrū E: e Item vt C, ad D, ita eſt H, ad G; quod B, ipſos C D, multiplicans fecerit H G. Erit quoque vt C D minutia ad ſuū integrum E, ita H, ad G. Quoniā igitur eſt, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quod ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cū eius valorē reſpectu integri E,*

b 2. huius. c 18. ſeptimi. d 2. huius. e 17. ſeptimi.

F, 6. H, 9.

A, $\frac{2}{3}$ B. C, $\frac{3}{4}$ D. E, $\frac{1}{24}$ E.

G, 12. K, $\frac{5}{2}$.

A B. F.
C D. H.
E. G.

exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad
a 2. huius. integrum E. a Cum ergo quoque ſit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & F G: ac proinde cum minutia K, æqualis ſit datæ minutiæ erit quoque ſimplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, cuius integrum E quod eſt propoſitum.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiæ $\frac{3}{4}$ reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12. qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquiualet, qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

b 13. huius.

```
      E, 6.
A, 2.      C, 3.
B, 3.      D, 4.
      F, 12.
```

SIT primum A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat E; & ex B, in D fiat F. b Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam E F. quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit A B, minutia minutiarum C D E F, ita vt C D, ſit minutia minutiæ E F, & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atque ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe.

```
   G, 6.      I, 6.
A, 2.   C, 3.   E, 1.
B, 3.   D, 4.   F, 2.
   H, 12.     K. 24.
```

c 13. huius. c Nam minutia G H, æqualis eſt minutiæ A B, minutiæ C D, reſpectu minutiæ E F, tanquam integri cuiuſdam. d 13. huius. d Item minutia I K, æqualis eſt minutiæ G H, (hoc eſt, minutiæ A B, minutiæ C D.) minutiæ E F, reſpectu integri, cuius E F, eſt minutia, & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum, quod eſt propoſitum.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$ ſunt 6 qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

DATIS

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D; quarum A B ad aliam æqualem reducenda ſit, cui numeratorem numerator C, metiatur per numerũ ex A, in D productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem eſſe; & C, metiri G, per K, ex A, in D productum, & D, metiri H per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H, a erit vt A, ad B, ita G, ad H, b ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D facit, F, c metietur C, ipſum F per D: d Metietur autem & vnitas ipſum D, per D. Eadem igitur pars eſt C, ipſius F, quæ vnitas ipſius D. Cum ergo vnitas ſit ipſius D, pars à D, denominata, erit quoq; C, ipſius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipſius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia eſt minutiæ F, reſpectu integri G, ſuntq; numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; e conſtituet C, minutia minutiæ F, reſpectu integri G, minutiam ſimplicem M, (quas minutias C, F, M, ſeorſum ſcripſimus) reſpectu eiuſdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatẽ, & denominatores numerum K, (quod numeratores ſint vnitates, denominatores autẽ numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorũ multiplicatione factus eſt numerus K,) conſtituet minutia C, minutiæ F, reſpectu integri G, minutiam ſimplicem eiuſdem integri G, cuius numerator eſt vnitas, & denominator numerus K, qualis eſt minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui conſtituit C, minutiam minutiæ F, reſpectu integri G, pars erit ipſius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipſum G, metietur per K; toties nimirum ſumptus, quoties vnitas eſt in K, numero. Eadem prorſus ratione demonſtrabimus, D, metiri ipſum H, per L, numerum. Quod erat propoſitum.

G, 24. K, 8.

A, $\frac{2}{3}$ B. F, 12. C, $\frac{3}{4}$ D.

H, 36. L, 9.

C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.

a 17. ſeptim.
b 8. huius.
c 7. pronun.
d 5. pronun.
e 13. huius.

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ AB CD & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F ſintque primum numeri E. F, æquales. Dico minutias AB, CD, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E factus ex A, primo in D quartum æqualis eſt numero F facto ex C ſecundo in B tertium, a erit vt A, primus ad C, ſecundum numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D quartum, denominator ad denominatorem. b Quare minutiæ AB, CD, æquales ſunt. VEL ſic c Quoniam eſt vt E ad F ita minutia AB, ad minutiam CD, Eſt autem E ipſi F æqualis; erit quoque minutia AB minutiæ CD æqualis quod eſt propoſitum.

a 19. ſeptim.

E, 24. F, 24.
A, 2. G, 8.
B, 3. ✕ D, 12.

b 9. huius.
c 5. huius.

SED ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerum E æqualem quoque eſſe numero F Nam ob æqualitatem minutiarum d erit vt A, ad C numerator ad numeratorem ita B ad D, denominator ad denominatorem. e Quapropter idem numerus fiet ex A primo in D quartum, qui ex C ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri VEL ſic. f Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E. F. æquales, quod eſt propoſitum

d 9. huius.
e 19 ſeptim.
f 5. huius.

DEINDE ſit E, numerus maior numero F Dico minutiam quoque AB, maiorem eſſe minutia CD Cum enim ex A in D fiat numerus E, maior quam F; gignetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G, in D Quia igitur idem numerus F, fit ex G primo in D, quartum, & ex G, ſecundo in B, tertium, g erit vt G primus ad C, ſecundum, ita B tertius ad D, quartum: Eſt autem maior proportio A ad C, quam G, ad C, quod A maior ſit quam G. h Igitur maior quoque erit proportio A, ad C quam B ad D; ac proinde minutia AB maior erit, quam minutia CD. VEL ſic i. Quoniam eſt, vt E, ad F ita minutia AB, ad minutiam CD; Eſt autem E, maior quam F; erit quoque minutia AB, maior quam minutia CD Quod eſt propoſitum.

E, 24. F, 21.
G. $1\frac{3}{4}$ A, 2. C, 7.
B, 3. ✕ D, 12.

g 19. ſeptim.
h 9. huius.
i 5. huius.

VERVM

VERVM ſit iam minutia A B, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, eſſe maiorem. Cum enim maior ſit minutia AB quam minutia CD, a erit maior proportio A, ad C, quam B ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui ſit G. b Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum, qui ex C, ſecundo in B, tertium. Cum ergo ex A in D, maior fiat, quam ex C, in D propterea quod A, maior eſt quam G: erit quoque E factus ex A in D, maior quam F, ex C, in B genitus. VEL ſic. Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E ad F: Eſt autem AB, minutia maior quam minutia CD, erit quoque E maior quam F quod eſt propoſitum. a 9. huius. b 19. septimi. c 5. huius.

ATQVE hac eſt quoque demonſtratio eius regulæ, quam in Arithmetica praſcripſimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum propoſitarum maior ſit. Id quod etiam ad 5. propoſitionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos revocanda terminos. Si igitur A, & B, ſint inter ſe primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos revocari, ſed ipſa iam in minimis erit terminis conſtituta. Reducatur enim ſi fieri poteſt, ad minores terminos C, D, ita ut minutia CD, minutia AB, ſit æqualis. d Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque C D, numeri minores numeris AB, non erunt A, B, minimi termini in ſua proportione: e ſunt autem & minimi, cum primi inter ſe ſint. quod eſt abſurdum. d 8 huius. e 23. ſept.

A, 1.	C,
B, 12.	D,

SI vero A B, non ſint inter ſe primi; f ſit eorum maxima menſura C, quæ metiatur A per D; & B per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D & denominator E, æqualem eſſe datæ minutiæ AB & in minimis terminis conſtitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; g producentur A B ex C in D, E. h Quare erit, vt A, ad B, ita D ad E, i ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima menſura numerorum A, B metitur ipſos per D, E; erunt ex coroll. propoſ 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod eſt propoſitum. f 2. ſept. g 8 pro[illegible] h [illegible] i 8 huius.

A, 36.		D, 3.
B, 48.		E, 4.
	C, 12.	

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando fieri poteſt, revocare.

SIT data minutia AB, revocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus ſit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum

A,3.	E,9.
B,4.	C,12.
D,36.	

C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datas, æqualem eſſe minutiæ A B, datæ. Qui enim B metitur D, per E, a fiet D, ex B, in E: Factus eſt autem
a 9. pronun. idem D, ex A, in C. b Igitur erit, vt A, primus ad B, ſecundum ita
b 19. ſeptim. E, tertius ad C, quartum; c ideoq; minutiæ AB, EC, æquales erunt. quod eſt propoſitum.

c 8. huius. QVOD ſi B, non metiatur D ex A in C, procreatum poterit data minutia A B reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, ſi fieri poteſt, ad minutiam EC.

A,3.	E,—
B,4.	C,10.
D,30.	

d 8. huius. Quia ergo minutiæ AB, EC æquales ſunt; d erit vt A, ad B, ita B, ad C. e Idem igitur numerus
e 19. ſeptim. fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, ſecundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex
f 7 pronun. A, in C. f Igitur B, metietur D per E. quod eſt abſurdum. Ponitur enim ipſum D, non metiri.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem dividitur, numerus Quotiens eſt minutia, cuius numerator eſt numerus minor diviſus, denominator vero maior numerus dividens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem eſſe minutiam A B, cuius numerator

A,6.	B,11.

$\frac{A,6.}{B,11.}$

g 8. huius. A, & denominator B. g Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numerus diviſus ad dividentem, hoc eſt, vt numerator ad denominatorem ita minutia AB, ad integrum, hoc eſt, ad vnitatem; erit ex defin. Diviſionis minutia AB, Quotiens diuiſionis numeri A per numerum B quod eſt propoſitum.

HINC fit, ſi diviſo numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid ſuperſit; Quotienti integro inuento addendam adhuc eſſe minutiam, cuius numerator ſit numerus ex diviſione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui neceſſario minor eſt numero diuidente, diuidendus adhuc eſt per eundem numerum dividentem, qui maior eſt. Verbi gratia Diviſio numero 23 per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt
h 19 huius. 3. adhuc dividenda per 4. h Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$ ita ut totus Quotiens ſit $5\frac{3}{4}$.

XX.

MINVTIAS plures in vnam ſummam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ AB, CB, eiuſdem denominationis.

nationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat ſumma D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam DB, eſſe ſummam ex additione minutiarum AB, CB, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominationem; a erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB. Et componendo, vt A C, ſimul ad C, ita minutia AB, CB, ſimul ad minutiam CB. b Vt autem C ad D, ita quoque eſt minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex æquo erit, vt AC, ſimul ad D, ita minutiæ AB CB, ſimul ad minutiam DB. Cùm ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoque minutiæ AB, CB, ſimul æquales minutiæ DB quod eſt propoſitum.

a 4. huius.

b 4. huius.

A, 3	C, 4	D, 7
B, 10.	B, 10.	B, 10.

DEINDE ſint addendæ duæ minutiæ AB, CD, diuerſarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C, numerator poſterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; ſit ſumma E, ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam EF, eſſe ſummam ex datis duabus minutiis AB, CD, collectam. c Quoniam enim eſt, vt integrum ad ſummam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E, ſummam productorum ex numeratoribus in denominatores viciſſim ductis: erit conuertendo, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad integrum, ita E, ad F: d Vt autem E, ad F, ita quoque eſt minutia EF, ad idem integrum. Igitur erit, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter ſumma minutiarum AB, CD, æqualis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF, ſumma erit ex minutiis AB, CD, collecta. quod eſt propoſitum.

c 6. huius.

d 2. huius.

A, 2	×	C, 3	E, 17.
B, 2.		D, 4	F, 13.

VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim & ex multiplicatione denominatorum inter ſe, fiunt duæ minutiæ eiuſdem denominationis, minutiis AB, CD, æquales, vt ex demonſtratione propoſ. 10. conſtat: ſi ſummæ E, productorum ex numeratoribus in denominatores ſupponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus facta erit minutia EF, ſumma minutiarum AB, CD, hoc eſt, duarum illarum eiuſdem denominationis, ad quas AB, CD, reductæ ſunt, vt initio huius propoſitionis demonſtratum.

IAM vero datis pluribus minutis; addendæ primum erunt duæ primæ: deinde hæc ſumma cum tertia coniungenda, atque hæc ſumma cum quarta, & ſic deinceps, donec omnes abſoluantur.

QVOD ſi dentur integra cum minutiis, addenda erunt integra ſeorſum, & minutiæ ſeorſum.

SINT verbigratia, $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$ ſunt 40. & $\frac{3}{4}$ ſunt 45. Ex 40. & 45. fit ſumma 85. hoc eſt, totus numerus integer 60 & inſuper 25 veritates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta eſt ſumma $\frac{17}{12}$. id eſt, ſemel 1. & inſuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam ſumma minutiarum $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{9}$. eſt $\frac{21}{27}$ hoc eſt, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum ſit 36. erit $\frac{1}{3}$ ipſius 12 at $\frac{4}{9}$ eiuſdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. confici 28. hoc eſt $\frac{7}{9}$. ipſius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB detrahenda ſit minor CB, ſintque primum hæ minutiæ eiuſdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus ſit numerus D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam DB, reliquam eſſe poſt detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, ſubtractus relinquit D. componetur A, ex C & D. Minutia ergo AB, cuius numerator A ex numeratoribus C D collectus eſt, ſumma eſt duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis propoſ. oſtenſum eſt. Quare detracta minutia CB ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB quod eſt propoſitum.

A, 7 / B 10. C, 3 / B, 10. D, 4 / B, 10.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuerſos denominatores, detrahendaq; ſit minor CD, ex maiore AB. Ex C numeratore minoris in B denominatorem maioris fiat E, & ex A, numerator maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atq; E, ablatus ex F; relinquat G, cui ſupponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorũ procreatus.

F, 15. E, 8.

A, 3 / B, 4. ✕ C, 2 / D, 5 G, 7. / H, 20.

Dico minutiam GH, eſſe reliquam poſt detractionẽ minutiæ CD, ex
minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H, a erit
a 17. ſe- vt A ad B, ita F, ad H: b vt autem A, ad B, ita eſt minutia AB, ad
prim. integrũ. Igitur erit quoq; vt F ad H, ita minutia AB, ad integrum.
b 2. hu- Rurſus quia B, multiplica, C, D facit E, H, c erit vt C, ad D, ita E,
ius. ad H: d Vt autem C, ad D, ita eſt minutia CD, ad integrum. Igitur
c 17. ſep. erit quoque vt E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur
d 2. hu- eſt vt E primus ad H ſecundum, ita minutia CD, tertius numerus
ius. ad integrum, quartum numerum: e Et vt G, quintus ad eundem
e 2. hu- ſecundum H, ita minutia GH, ſextus numerus ad idem integrum,
ius. quartum numerum; erit ex 5. theor. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt E, G,
primus & quintus ſimul, ad H, ſecundum, ita minutia CD, GH,

tert.

tertius & ſextus numerus ſimul, ad integrum Vt autem E, G, ſimul ad H, ita eſt F, ipſis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutiæ C D, G H ſimul ad integrũ. Cum ergo oſtenſum ſit, vt eſt F, ad H, ita eſſe minutiã A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrũ, ita minutiæ C D, G H ſimul ad idem integrũ: ac propterea æquales erunt minutia A B, & minutiæ C D, G H, ſimul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod erat propoſitum. VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex ductu denominatorum inter ſe, gignuntur duæ minutiæ eiuſdem denominationis minutiis datis æquales, vt ex demonſtratione propoſ. 1c. conſtat; ſi E factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, vel quæ poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propoſ. oſtenſum eſt.

IAM vero ſi dentur integra vna cum minutiis, ſubtrahenda ſunt integra ſeorſum ab integris, & minutiæ a minutiis. Quod ſi minutia detrahenda, maior ſit quam ea, à qua fieri debet ſubtractio, a reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt ſi ſubtrahenda ſint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$ Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahenda ſint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$ facit $\frac{7}{4}$. remanebuntque 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. — a 11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$. id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt, ex 30. ſuperſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, b Eritque, vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia vero C multiplicans A F, facit E H; c erit vt A, ad F, ita E, ad H. Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit C, & F;

H, 60. G, 40.

$\frac{A, 2.}{B, 3.}$ $\frac{C, 4.}{D, 5.}$ $\frac{E, 8.}{F, 15.}$

b 19. ſeptimi.
c 17. ſep.

erit

a 17. sep. A. G. a erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate E. F. perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, B. H. ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D: b Et vt A, ad B, ita b 2. huius. eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D, quod eſt propoſitum.

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eidem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quod vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorẽ datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$ per 5 fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

c 11. huius. SI vero integris minutiæ adhæreant, c reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cũ minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$ per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$ $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accõmodemus, non erit minutia producta cum integro numero aſſumpto conferenda, vt in aditione, ac ſubtractione factum eſt, ſed cũ quadrato numeri integri aſſumpti; quia cum comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, cõferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Neceſſe eſt ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60 in $\frac{4}{5}$. eiuſdem faciant numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in ſe producitur: Id quod liquido conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. ſunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920 qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc eſt quadrati ipſius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita vt diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ A B,

A, 12.	C, 3.	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.

A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D metitur B. per F, a gignetur A, ex C. in E. & B, ex D, in F. b Igitur minutia A B, producta eſt ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cum ſit, vt A B, minutia diuiſa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1; erit ex defin. Diuiſionis minutia E F, Quotiens diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D. quod eſt propoſitum. a 9. primi. b 22. huius.

A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3.	C, 3.	E, 1.
B, 8.	D, 4.	F, 2.

DEINDE *numeri C, D. minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B.* c *Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C D, minutiæ C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, ſi K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F. per G H, erit minutia G, H, Quotiens diuiſionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, vt initio huius propoſ. demonſtratum eſt, quod eſt propoſitum.* c 15. huius.

E, 24.	A, 2.	K, 12.	C, 3.	G, 8.
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.
E, 90.	A, 6.	K, 15.	C, 3.	G, 30.
F, 135.	B, 9.		D, 5.	H, 27.

QVIA *verò G, H, numeri minutiæ Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſuis minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ diuidendæ in D. denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B. denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atque hoc verum eſt in omnibus minutiis, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda ſecundum doctrinam propoſ. 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet. atque in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeri A. B metiuntur per G H & numeros E. F, procreatos ex A. B. in K. productũ ex G, in D, iidem numeri C, D, metiuntur per L, M. atque adeo tam*

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4.	L, 24.
F, 54.	B, 9.		D, 3.	H, 3.	M, 18.

minu-

minutia G H, quam L M, Quotiens eſt minutia A B, per minutiam C D, diuiſa.

IAM verò ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appoſito priori exemplo perſpicuum eſt. Si autẽ minutia $\frac{1}{2}$ diuidenda ſit per integrum numerũ 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in poſteriori exemplo apparet.

$$\frac{8}{1}. \quad \frac{1}{2}. \quad \frac{16}{1}.$$

$$\frac{1}{2}. \quad \frac{8}{1}. \quad \frac{1}{16}.$$

QVOD ſi minutiæ adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cũ minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſ. diximus.

VERVM quia non facile eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorẽ minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autẽ ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $2\frac{5}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

$$\frac{3}{4}. \quad \frac{7}{2}. \quad \frac{21}{8}.$$

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$. id eſt, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proxime inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus, diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſupra fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inſerenda, ſitque primum ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, vnius particulæ minutiæ C D, ad minutiam C D: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F; cui addatur A, numerator prio-

	F, 24.	
A, 3.	C, 6.	G, 27.
B, 4.	D, 7.	H, 28.

ris, & compoſito numero G ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex inſinuatione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe minutiæ A B, reſpectu unius particulæ minutiæ CD additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia unius particulæ minutiæ CD, a reducitur ad ſimplicem minutiam AH, cuius numerator idem eſt, qui A, productus nimirum ex unitate in A, denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, ut in appoſito exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis eſt, habens eundem denominatore H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C D, faciat F H; b erit ut C, ad D, ita F, ad H; c ac propterea minutiæ BD FH, æquales erunt.) efficitur, minutiam GH, cuius numerator G, ex numeratoribus F A, minutiarum FH, AH, componitur, [nimirum ex numero ex C, in B producto, & ex A] denominator autem H idem, qui earundem minutiarum FH, AH; efficitur, inquam, minutiam GH, ſummam eſſe minutiarum FH AH, ut initio propoſ. 29 oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummam ex minutia AB, reſpectu unius particulæ minutiæ CD, quæ minutiæ AH, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia CD quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ FH, collectam. Minutia igitur GH, procreatur ex inſinuatione minutiæ AB, in minutiam CD; id eſt, æqualis eſt minutiæ AB, unius particulæ minutiæ CD, & minutiæ CD ſimul, quod eſt propoſitum.

a 14 huius.

A, 3.	1	A, 3
B, 4.	D, 7.	H, 28.

b 17. ſeptim.

c 8. huius.

IAM vero ſi plures minutiæ AB, CD EF GH, ſint inſerendæ, hoc eſt, ſi minutia AB, unius particulæ minutiæ CD, unius particulæ minutiæ EF, unius particulæ minutiæ GH, & minutia CD, unius particulæ minutiæ EF, unius particulæ minutiæ GH: & minutia EF, unius particulæ minutiæ GH addi debeant ad minutiam GH, ita agendum erit. Ex C, numeratore poſtremæ minutiæ GH, in F, denominatore penultimæ minutiæ EF, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdem penultimæ minutiæ EF, ut fiat numerus K. Deinde producto ex K, in C, denominatorem antepenultimæ minutiæ CD, addatur C, numerator eiuſdem minutiæ CD, ut fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proxime antecedentis minutiæ AB, adiiciatur A, numerator eiuſdem minutiæ AB, ut fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper ultimus numerus conflatus in denominatorem

P, 119.	M, 59.		K, 14.
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.
A, 1.	B, 2.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.		L, 15.

proxi-

proxime antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiuſdem proxime antecedẽtis minutiæ adiiciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Numero autẽ P, qui vltimo loco conflatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatu procreatus, ducendo primũ H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, poſt hæc N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex inſitione datarum minutiarum produci in eo ſenſu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus minutiis oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiæ E F, in minutiam G H, hoc eſt, æqualis eſt ſumma ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collecta. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ

a 14. huius. G H, a facit minutiã ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirũ ex C, in vnitatẽ bis poſitã hoc modo, 3.1.1.) & denominator N, ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F D, procreatus: Minutia quoq; cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, produ-

b 8. huius. ctus, b æqualis eſt minutiæ K L; c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe

c 17. ſep. cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrabimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſumma collecta ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atq; ex minutia, cuius numerator G, & denominator N, atq; ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoq; erit eadem minutia M N, ſumma collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atq; ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius parti-

d 14. huius. culæ minutiæ G H, d facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q ex B, in N, id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoq; cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus

e 8. huius. Q ex B, in N, productus, e æqualis eſt minutiæ M N, f quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem

f 17. ſep. habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſumma collecta ex minutia, cuius numerator A, &, denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum eſt; æqualis quoq; erit eadem minutia P Q, ſumma collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia A B,

vnius

vnius particula minutiæ CD, vnius particula minutiæ E F, vnius particula minutiæ G H, quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G, H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu; hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D.

E,	18.	F,	24.		
A,	3	C,	6	G,	42
B,	4.	D,	7.	H,	28.

Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, a reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus, B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat: b Minutia quoque F H, æqualis eſt minutiæ C D; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quæ ex iis, quæ ad initium propoſ. 20. oſtendimus æqualis eſt ſummæ minutiarum E H, F H,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia C D; (hoc eſt, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiã C D, in hoc poſteriori ſenſu. Quod eſt propoſitum.

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. ſeptimi

A,	3	C,	6	E,	18
B,	4.	D,	7.	H,	28.

QVOD ſi plures ſint minutiæ inſerendæ A B, C D, E F, G H, hoc eſt, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutia E F, minutiæ G H, addendæ ſint ad minutiam G H, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt

P,	232.	M,	104.	K,	20.		
A,	1	C,	3	E,	2	G,	4
B,	2.	D,	4.	F,	3.	H,	5.
Q,	120.	N,	60.	L,	15.		

in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam vt in duabus minutiis demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſumma collecta ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, to-

a 14. huius. *tius minutiæ E F, totius minutiæ G H, a facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus:*

b 8. huius. *b æqualis eſt minutiæ K L:*

c 17. ſeptimi. *c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſumma collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator vero eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia M N, ſumma collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutiæ*

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4

B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L, 15.

d 14. huius. *G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, d facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq; cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem eſt idem Q, ex B, in N, procreatus,*

e 8. huius. *e æqualis eſt minutiæ M N:*

f 17. ſeptimi. *f quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem: cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſumma collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoq; erit ſumma collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H, & ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, quod eſt propoſitum. Eademq; de pluribus eſt ratio.*

DE

DE PROPORTIONVM compoſitione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquum eſt, vt compoſitionem proportionum ex liceremus: Id quod ad defin. 10. libr. 5 & ad defin. 5. libr. 6. & ad propoſ. 23 libr. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. libr. 5. & defin. 5. libr. 6. in iis propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe vero additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatiue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit vere totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclid. exiſtimant, ex hoc perſpicue confirmari poteſt: quod pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cum hæc compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. libr. 5. oſtendimus, ſi poſitis his tribus terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10 vt vult defin. 10. libr. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coacervata foret ex duabus proportionib. 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Euch. interpretes putant, quis non videt partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem eſſe toti. Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coacervaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt iidem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totum, quod proportio dupla 4 ad 2 maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8 Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5 primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris vero 3 & 16.

24.	48.
12. 2.	3. 16.

Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24. ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum, hoc eſt, ex proportione 12 ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (ſi hæc compoſitio eſt vera additio) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. vere totum eſt, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harum ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſub octupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24 ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quod ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione, æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12.

24.	48.
12.2.	12.4.

quæ maior eſt quam totum, hoc eſt, quam proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totum non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1 ſint æquales: ſi cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12, 4. 2. 1. 6 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quamquam noncupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo momenta vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5 lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quam agens vt 6?

LIQVET ergo huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. libr. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur poſitis tribus, quatuor aut pluribus terminis continue proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius

propor-

proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex iis, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE *omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio fieri debent per proportionum denominatores, ut recte docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutia, ut lib. 5 docuimus; (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit unitas, ut ex eo fiat quaſi minutia ab unitate denominata) quarum qualibet æqualis eſt fractioni, quam conſtituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedente fiat numerator, & ex conſequente denominator: manifeſte colligitur, operationes Arithmeticas in proportionum denominatores, ſiue per numeros earundem proportionum quoſcunque, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarum, inſtituantur, ut egregiè Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, ut iam apparebit.*

PRIMVM *enim ſint in unam ſummam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores ſunt 3. & 5. ex quorum additione fit ſumma 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ ſumma etiam colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius unitate cuilibet illorum, inſtar minutiarum addantur, ſiue numeri 12. 4 & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent fracti numeri, poſitis terminis conſequentibus ſub antecedentibus, in unam ſummam colligantur.*

3	×	5	12	×	40
1		5	4		8
	8			256	
	1			32	

Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. poſteriori autem 256. ad 32. quarum utraque octupla eſt. Sic etiam ex proportione dupla ſuperquadripartiente ſeptimas, & ſeſquialtera, quarum denominatores ſunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. *quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla ſeſquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84.*

18	×	3	54	×	6
7		2	21		4
	57			342	
	14			84	

Sed quando per denominatores inſtituitur operatio, reuocandi prius ſunt denominatores ad unicas fractiones, ut hic factum eſt. Nam $2\frac{4}{7}$ *reuocauimus ad* $\frac{18}{7}$ & $1\frac{1}{2}$. *ad* $\frac{3}{2}$. *Quod in aliis etiam operationibus intelligendũ eſt.*

DEINDE *ſi ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla ſeſquidecimaquarta deducatur proportio ſeſquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla ſuperquadripartiens ſeptimas, ut hic perſpicuum eſt.*

8	× 8	256	× 12	57	× 3	342	× 4
1	1	32	4	14	2	84	4
5		40		72		864	
1.		128.		28		336	

Tertio ſi multiplicanda ſit proportio tripla per 2. vel quod idem eſt per proportionem duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas; inſtituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q; ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.

3	—— 2	6	12	—— 10	120	3	—— 8	24	9	—— 16	144
1	—— 1	1	4	—— 5.	20.	2	—— 5.	10	6	—— 10	60

Qvarto & vltimo ſi proportio ſextupla diuidenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionem ſeſquialteram: ſi diuiſoris termini permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetur operatio.

6	—— 1	6	120	—— 4	480	24	—— 2	48	144	—— 6.	864
1	—— 3.	3.	20	—— 12.	240.	10	—— 5.	30.	60	—— 9.	540

Vides ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re diſcrepare, niſi quod in proportionibus neceſſe non eſt interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis.

Iam vero multiplicationem proportionum à nobis praſcriptam, quam auctores additionem falſo nuncupant, cum proportionum compoſitione, de qua Euclides defin. 10 lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeo compoſitionem illam Euclidis vere eſſe multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonſtrabimus. Sint dua proportiones A, ad B, & C, ad D, ſiue aquales, ſiue inaquales; ducatur q; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex conſequente vero B, in conſequẽtem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, qua ex illa multiplicatione producitur, eſſe compoſitam ex proportionib. duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt ſi proportiones ka A, ad B, & C, ad D, fuerint aquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin 10. lib 5. ſi autem fuerint inaquales, dicatur ex illis compoſita, ex ſententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A,

A, 6.	C, 12.	A, 3	C, 6
B, 2.	D, 4.	B, 2.	D, 5.
E, 72,	F, 8.	E, 18.	F, 10.
G, 24.		G, 12.	

B, in C,

B, in C, fiunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rurſus quia ex B, in C, D, fiunt, G, & F, b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eædem ſint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonſtratione, quam ad defin. 5. lib. 6 ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compoſitio proportionum ab Euclide deſcripta reſpondeat multiplicationi denominatorum inter ſe, vt ibi demonſtrauimus, noſtra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido conſtat compoſitionem illam proportionum eſſe multiplicationem, quam tradidimus.

a 18. ſeptim.
b 17. ſeptim.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam iidem auctores docent, non eſſe aliud, quam diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem eſt, ac ſi termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuiſione proportionis, A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eã, quæ relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem eſt, quæ G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F; ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) demátur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit?

A, 9.	C, 3.	A, 4.	C, 6.
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3.
E, 9.	F, 3.	D, 8.	F, 12.
G, 27.		G, 24.	

c 1. ſeptim.
d 17. ſept.

Atque hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

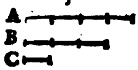
I.

Commensvrabiles magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

Absolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantū ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium, quarum cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harum linearum complures magnitudines tum ſolidæ, tum planæ, neque perfecte intelligi poſſunt, neque cum res tulerit, in opus atque vſum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommenſurabilia ſunt: Id quod & de planis ipſis atque ſolidis dici poteſt, quippe cum & hæc incommenſurabilia ſæpenumero exiſtant, vt ad finem huius libri demonſtrabimus. Quoniam vero hic liber multis obſtructus eſt difficultatibus, ob linearum, de quibus diſſerit, obſcuritatem; omnes neruos induſtriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide ſunt demonſtrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonſtrationes recte intellexerit, poſſit percipi. Neq; enim in eorum poſſum ſententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam eſſe neceſſariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quam irrationalibus, vt vocant, ſermonem inſtituit: Imo contra perſuaſum mihi prorſus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abeſt,

abeſt, ut exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod ille demonſtrationes ad uſum poteſt reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accommodauimus, ut oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra utitur, uſurpaſti, ut ea res & maiori voluptati eſſet, & cõmodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius offuſuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis; quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adiumento, ac luce, quam nos noſtris commentariis afferre laboramus, plus caperent incommodi; minusq; demonſtrationes ipſas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſola neceſſaria ibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſeipſos, quando volunt, præſertim cum iam hoc ipſum nõ multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQVE, *ut ad inſtitutum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadem menſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem menſura, C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles. Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas lineas tam unius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertia partis unius palmi, &c. metitur. Similiter commenſurabiles, dicuntur ſuperficies, quas una, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidaue commenſurabilia, quæ metitur idem corpus, ſeu ſolidum.*



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES *magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, & latus eiuſdem quoniam nullam habent menſuram communem, ut propoſitio-*

poſitione vltima huius lib. demonſtrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurima alia lineæ incommenſurabiles, quibus ſcilicet menſura aliqua cõmunis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq́, quadam ratione inueniri poſſint. Rurſus, ſuperficies dicentur incommenſurabiles, & ſolida incommenſurabilia, quæ nullam admittunt menſuram communem.

III.

RECTÆ lineæ potentia commenſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM *rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1. commenſurabiles ſimpliciter diximus: quædam vero longitudine incõmenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearum. quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, aliæ ſunt eiuſmodi, vt earum quadrata ſint commenſurabilia; aliæ vero ita ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarũ quadrata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt, ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusq́ lineæ quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.*

QVOD *ſi quis roges, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia commenſurabiles, non autem commenſurabiles longitudine, reſpondendum eſt, lineas longitudine commenſurabiles ſatis ſuperque eſſe explicatas in definitione commenſurabilium magnitudinum, cum huiuſmodi lineas vna communis menſura metiatur, vt dictum eſt: At vero quoniam lineas potentia commenſurabiles nulla communis menſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata idem ſpatium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt eæ propria definitione explicarentur.*

IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit cõmunis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS *reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.*

HABENT *autem lineæ commenſurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quaſi conuenientiam inter ſe, & connexionem, vt li-*

vt lineæ longitudine cõmenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles potentia, ita vt nulla lineæ dari poſſint commenſurabiles longitudine, quin earũ quadrata commenſurabilia quoq; ſint, quoniam quadratum ex cõmuni earum menſura deſcriptum metitur tanquam menſura cõmunis earũ quadrata, vt in ſubiecta figura apparet: ſicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoque quadratum AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commenſabiles, ſint etiam commenſurabiles longitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles, hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur. Rurſus inter lineas incõmenſurabiles tam longitudine quam potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles; ſint etiam incõmenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.



V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunq; rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potẽtia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI *proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis erunt omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles lõgitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quanquam eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdam dici poſſe propoſitæ rectæ lineæ commenſurabiles longitudine, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.*

LINEA *autem illa propoſita, ratione cuius aliæ cõmenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Græcis* ῥητὴ; *Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper notæ ſunt, quamuis ſigulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunq; partes æquales poſſit diuidi.*

VI.

Et huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

Docet *lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunque appellari quoque Rationales, non quidem ex poſitione, vt illa, ſed quia cum illa comparata reperiuntur ei commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.*

Itaque *ex ſententia Euclidis, radix quadrata huius numeri* 20. *vel* 1000. *&c. Seu quod idem eſt, linea recta, cuius quadratum eſt* 20. *vel* 1000. *&c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali; (eſt enim tam numerus* 20. *quam* 1000. *commenſurabilis numero cuilibet quadrato, vt* 16. 100. *&c.) quamuis longitudine ſit eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non poſſit exprimi.*

VII.

Hvic vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

Qvoniam *antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum ſunt commenſurabiles propoſita rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido conſtat, cum hic eas dicere Irrationales, quæ propoſita rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam huius numeri* 20. *vel* 1000. *&c. ſeu (quod idem eſt) lineam, cuius quadratum eſt* 20. *vel* 1000. *&c. non poſſe appellari irrationalem, cum non ſit longitudine & potentia, ſed longitudine tantum Rationali lineæ propoſitæ incommenſurabilis.*

VIII.

Et quadratum, quod à propoſita recta fit, dicatur Rationale.

Qvemadmodvm *linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea deſcriptum, Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notum, comparationeque illius aliæ ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabileſue dicuntur.*

IX.

Et huic commenſurabilia quidem Rationalia.

Omnes *planæ ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex poſitione, vt illud, ſed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commenſurabiles,*

vel

vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunque commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia, quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potentia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

Hvic vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato à Rationali linea deſcripto incommenſurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

Et rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſunt, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatiis incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales: quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidem quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia: ſi vero non fuerint quadrata, ſed alia quæcunque figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturque in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: *apponere fere ſemper vocibus iſtis:* commenſurabiles ac incommenſurabiles: *Vix autem, & rariſſime his:* Rationales, & Irrationales: *Rectè enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine*

dine & potentia, vel potentia tantum: Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt varie, & obſcure in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibuſque, nec non Rationalibus, Irrationalibuſq; ſint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vſus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cum maior infinita non ſit, minor vero infinite poſſit augeri, perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Conſtat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum cenſeri eiuſdem generis, cum alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ diuerſi eſſe generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONVNciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

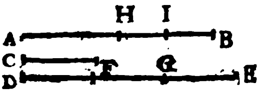
CÆTE-

CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani neglex imus, vt docuimus ad initium primi libri: curauimus, vt duplex numerus in margine è regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtraret. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelliges, quod ad numerum propoſitionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quam dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

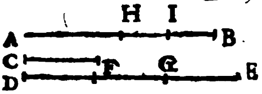
PROPOSITÆ ſint duæ magnitudines inæquales A B, & C, quarum A B, ſit maior. Dico ſi ex A B auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit quam C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta D E, maior ſit quam A B, ita vt D E, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quam A B. Diuiſa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipſi C, æquales, detrahatur ex A B, maius quam dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quã dimidiũ H I, atq; hoc ſemper fiat, donec partes ipſius A B, multitudine æquales ſint partibus ipſius D E.



Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot ſunt ipſæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior eſt quam A B; At ex D E, ablatum eſt D F, minus quam dimidiũ, vel certe dimidiũ, ſi D E, ipſius ſit duplex; ex A B, vero maius quam dimidium A H: Erit reliquum F E, reliquo H B, maius. (Cum enim D E, maior ſit quam A B; ſi ex D E, dimidium auferretur, nec nõ & ex A B, dimidium, eſſet quoque reliquũ ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quam dimidiũ, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium; erit reliquum ex D E, maius reliquo ex A B.) Rurſus quoniam F E, maior eſt quam H B, auferturque ex F E; dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, ſi F E, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex H B, maius quam dimidium H I: erit eodem modo reliquum G E, maius reliquo I B: atque ita procedendo oſtendemus tandem poſtremam partem, ipſius D E, qualis hic eſt

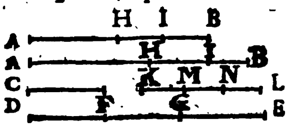
GE, ma-

G E, maiorem eſſe poſtrema parte ipſius A B, qualis hic eſt I B. Cum ergo G E, poſtrema pars ipſius D E, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, maior quam I B, poſtrema pars ipſius A B. Relictæ igitur eſt I B, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.



Idem demonſtrabitur, ſi ex A B, auferatur dimidium A H, & ex reliquo H B, rurſus dimidium H I, &c. Nam eadem ratione erit reliquum F E, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; cum ex maiori D E, ablatum ſit D B, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

Aliter. Facta conſtructione, vt prius, ſumatur K L, ita multiplex ipſius I B, vt eſt multiplex D E, ipſius C. Diuiſa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipſi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero A H, maior eſt quam H B, vel certe illi æqualis ſit, ſi ablatum ſit dimidium ex A B; & H B, maior eſt, quam I B; erit quoque A H, maior quam I B, hoc eſt, quam K M. Rurſus quia H I, maior eſt quam I B, vel certe illi æqualis; eſt autem I B, ipſi M N, æqualis: erit quoque H I maior quam M N, vel illi æqualis; atque adeo tota A I, maior, quam tota K N. Additis ergo æqualibus I B, N L, erit tota A B, maior quam tota K L: Eſt autem D E, maior adhuc, quam A B. Multo ergo maior erit D E, quam K L. Quare cum ſit vt D E, ad C, ita K L, ad I B; (Sumpta enim fuit



a 14. quinti. K L, ipſius I B, tam multiplex, quam multiplex eſt D E, ipſius C.) a erit quoque C, maior quam I B. Ac proinde relicta eſt I B, minor quam C. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonſtratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

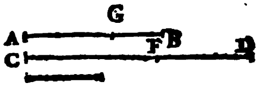
ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

DVA-

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis A B, C D, quarũ minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & ſic



deinceps, alterna quadam detractione auferatur ſemper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B, C D, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas, ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta autẽ A B, ex C D, quoties poteſt, relinquat F D, ſe minorem, ita vt A B, ipſam C F, metiatur. Rurſus detracta F D, ex A B, relinquat ſe minorem G B, ita vt F D, metiatur ipſam A G; atque hoc ſemper fiat. *a* Relinquetur ergo tandem ex C D, vel A B, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum A B, ablata ex C D, relinquat F D, ſe minorem, erit C F, ablata maior, quam dimidia ipſius C D; alias ſi eſſet dimidia, vel minor quam dimidia, poſſet adhuc A B, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipſius A B: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatur maius, quam dimidium, *b* relinquetur tandem magnitudo quædam minor quam E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur C F; *c* metietur quoque E, ipſam C F: Metitur autem E, & totam C D. *d* Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G; *e* quare & E, ipſam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: *f* ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.

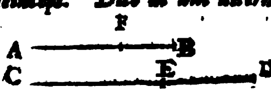
a 1. dec.
b 1. dec.
c 2. pronun.
d 3. pronun.
e 2. pronun.
f 3. pronun.

SCHOLIVM.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommenſurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturque minor A B, ex C D, & reliqua ſit E D; item E D, ex A B, auferatur, relinquaturque F B, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D:



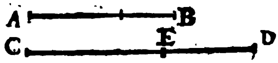
ED, metitur A F: g metietur quoque F B, ipſam A F: Metitur autem

g 2. pronun.

a 1. pronun. *autem & ſeipſam.* a *Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur*

b 2. pronun. *autem A B, ipſam C E.* b *Igitur & F B, ipſam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipſam E D:* c *Igitur & F B, totam C D, metietur.*

c 1. pronun.



Oſtenſa eſt autem & F B, ipſam A B, metiri. Quare F B, vtramque A B, E D, metitur, quod eſt abſurdum, ponuntur enim A B, C D, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.

SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

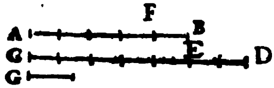
NAM ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim commenſurabiles.

ITAQVE facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem: erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt conſtat ex demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATÆ duæ magnitudines commenſurabiles ſint A B, C D, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, ſit vt ſi minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione,



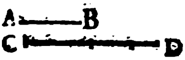
tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentem E D. Dico F B, eſſe maximam menſuram communem magnitudinem A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, iam oſten-

oſtendemus. Quoniam F B, metitur E D; & ED, metitur A F; *a* metietur quoque F B, ipſam A F: At metitur F B, & ſeipſam. *b* Igitur FB, totam AB, metietur; *c* atque adeo & ipſam C E, quam AB, metitur. Cum ergo & ipſam E D, metiatur; *d* metietur quoque FB, totam CD. Metitur ergo FB, vtramque A B, C D. Quare vtriuſque AB, C D, communis menſura eſt F B.

a 2. *pronun.*
b 1. *pronun.*
c 2. *pronun.*
d 1. *pronun.*

Qvod autem F B, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earũ menſura, maior quam FB. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam F B. Quia igitur G, metitur vtramque A B, C D; metitur autem & AB, ipſam C E, *e* metietur quoque G, ipſam C E: At metitur quoque totam C D; *f* Igitur G, reliquam quoque E D, metietur: Metitur autem E D, ipſam A F. *g* Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. *h* Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis menſura eſt ipſarum AB, CD. Quare FB, maxima earum communis menſura eſt.

e 2. *pronun.*
f 3. *pronun.*
g 2. *pronun.*
h 3. *pronun.*



Qvod ſi minor magnitudo A B, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa A B, ambarum maxima menſura communis: cum & ſeipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.

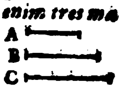
COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

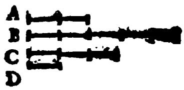
Eligitur hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt F B, eſſe maximam menſuram communem ipſarum A B, C D. Demonſtratum enim eſt ibi magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoq; maximam menſuram F B. Eademq; eſt ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

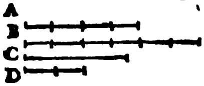
Ex his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propoſ. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuum eſt, omnes tres, A, B, C, eſſe commenſurabiles quod nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.

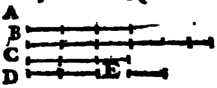


Si vero A, & B, fuerint commenſurabiles, ſit earum maxima communis menſura inuenta D: quæ ſi metiatur quoq; magnitudinẽ C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cum habeant communem menſuram D.



QVOD ſi D, maxima menſura magnitudinum A, & B, non metiatur C: erunt C, & D, vel commenſurabiles, vel non. Si ſunt incommenſurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommenſurabiles. Si enim credantur eſſe commenſurabiles, metietur earum maxima communis menſura ipſam D, maximam menſuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoq; C, non erunt C, & D, incommenſurabiles. Quod eſt contra hypotheſin.





SI vero C, & D, ſunt commenſurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commenſurabiles. a 3. dec. *a Inuenta enim E, maxima menſura ipſarum C, & D: cum E, metiatur D: & D, ipſas A, &* b 2. pronun. *B: b metietur quoq; E, ipſas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoq; C: metietur E, tres magnitudines A, B, C, Ac propterea commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.*

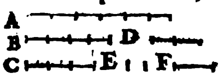
SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, ſint commenſurabiles, necne. Nam ſi datæ ſint quatuor, experiemur id primum in tribus: ſi quinq; in quatuor; &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

iiij.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C, quarum maximam menſuram inuenire oporteat. c 3. dec. *c* Sit D, maxima menſura ipſarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perſpicuum eſt, D, maximam eſſe menſuram omnium trium A, B, C. Nã ſi maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propoſ. 3. huius libr. maximam menſuram ipſarum A, B, nempe ipſam D, maior magnitudo minorem, quod fieri non poteſt. Si vero D, non metiatur C, erunt ſaltem D, C, commẽſurabiles. Cum enim A, B, C, ſint commenſurabiles, metietur quælibet menſura earum communis ipſam D, maximam menſuram ipſarum A, B, per coroll. præcedentis propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque ipſam C; erunt D, & C, commenſurabiles. d 3. dec. *d* Sit igitur E, maxima menſura ipſarum inuenta. Dico E, maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; *e* metietur quoque E, ipſas A, & B. Metitur au- e 2. pronun. tem & ipſam C: Igitur E, menſura eſt communis ipſarũ A, B, C, quemadmodum aſſeruimus.



QVOD

QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, maior quam E, fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam menſuram D, per coroll. præcedentis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

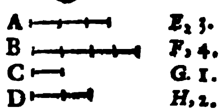
INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus cõmenſurabilibus datis, quam tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura cõmunis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua vero omnia abſoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

LEMMA.

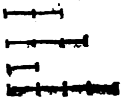
SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT *quotcunque magnitudines* A, B, C, D, *in eiſdem rationibus, in quibus totidem numeri* E, F, G, H: *Vt quidem* A, *ad* B, *ita* E, *ad* F; *& vt* B, *ad* C, *ita* F, *ad* G; *& vt* C, *ad* D, *ita* G, *ad* H. *Dico ex æquo eſſe, vt* A, *ad* D, *ita* E, *ad* H. *Quoniam enim ex iis, quæ ad defin 5. lib. 6. à nobis demonſtrata ſunt, tam proportio* A, *ad* D, *componitur ex proportionibus* A, *ad* B; B, *ad* C; *&* C, *ad* D; *quam proportio* E, *ad* H, *ex proportionibus* E, *ad* F; F, *ad* G, *&* G, *ad* H; *perſpicuum eſt, cum proportiones componentes proportionem* A, *ad* D, *æquales ponatur proportionibus, quæ proportionem* E, *ad* H, *componunt,*



ſunt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H. æquales eſſe: hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E ad H. Quod eſt propoſitum.

IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.


A B C D — E, 3. F, 12. G. 4. H, 6.

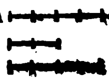
SCHOLIVM.

QVONIAM *præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantum eſt in quantitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cum omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.*

v. THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum.
a 3. decimi. a Sit enim earum maxima menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atq; numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Eſt autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipſam B, atq; vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat demonſtrandum.


A C B — D, 3. Vnitas. E, 2.

SCHOLIVM.

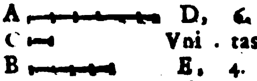
Cvm Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atque adeo in eis demonſtratio locum habet.

Qvod ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quã numerus ad numerum, quia commenſurabilia, atq; idcirco menſuram habent communem, ipſisq; demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, communis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

Ex demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos earum cõmunis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

Vnde, ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac cõmunis magnitudinum cõmenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

Qvod ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quamcunque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demonſtrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appoſita figura apparet.

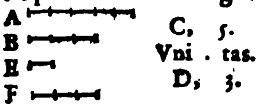


Quoniam vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omnium eandem cum ipſis proportionẽ habentium; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam cõmunem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si duæ magnitudines inter ſe proportionẽ habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico AB, magnitudines eſſe commenſurabiles. Quoties enim vnitas cõtinetur in numero C, in tot æquales partes diuiſa intelligatur magnitudo A, quarum partium, vni æqualis ſit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinẽ quandam aliam F.

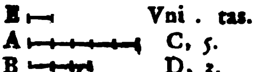


Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipſam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Eſt autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipſam F, & vnitas ipſam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propoſ. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, *a* ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter ſe ſunt. Quocirca cum E, ipſam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipſam B; Metiebatur autem & ipſam A. Igitur magnitudo E, vtramq; A, & B, metitur: *b* Ac proinde A, & B, magnitudines commenſurabiles inter ſe ſunt. Si igitur duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant &c. Quod erat demonſtrandum.

a 9. quinti.

b 1. def.

ALITER, Quot ſunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuiſa magnitudo A, quarum partium vni æqualis ſit magnitudo E. Quoniam igitur eſt vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipſam A, & vnitas ipſum D, æque metiantur; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma ſuperius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D.



Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem cõmunem menſuram E, *c* commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

c 1. def.

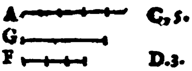
COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; ſumenda alia linea A, in tot æquales partium, quot vnitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſſit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum

ita

ita ſe habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quam ſi ſe habeat A, vt C, ad D. a Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, ſint continuè proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A. ad F. atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D, ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterq; deſcripta. a 13. ſexti.



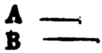
SCHOLIVM.

In hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij. o.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommenſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicãtur habere, quam numerus ad numerum: c erunt ipſæ commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommenſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat. c 6. defini.



SCHOLIVM.

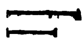
QVOCVNQVE modo lineæ incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue lõgitudine tantum, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 6. viij. o.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommenſurabiles eſſe.

a 5. decimi. Si enim A, & B, credantur eſſe commenſurabiles; a erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.

A
B


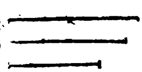
SCHOLIVM.

Qvod ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendum eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; imo nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

Si ſint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales, ſitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam. Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam.

Sint continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non: ſitq; vt A, ad C, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales ſunt.

A
B
C

D, 49.
E, 42.
F, 36.

Idem ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quam tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplica-

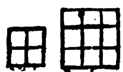
plicata, ad demonſtrationem : & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata ; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum : Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata ; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum : Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

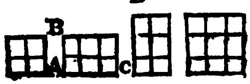
SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine ſunt commenſurabiles; *a* erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum : Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F : *b* habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD : *c* Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F ; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.

a 5. *decimi.*
b 20. *ſexti.*
c 11. *oct.*



A B C D
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 9.

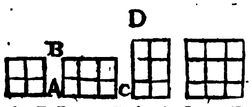
ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectangulum BD, ſub rectis AB, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdem propoſ. Quoniam igitur eſt



A BC DA BC D
E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.

AB, ad

a 1. *ſexti.* AB, ad CD, vt E, ad F: *a* Vt autem AB, ad CD, ita eſt quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, ſi CD, ponatur baſis rectanguli; Item vt E, ad F, ita eſt G, ad I: Erit quoque quadratum, ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rurſus quia eſt AB, ad CD, vt E, ad
b 1. *ſexti.* F. *b* Vt autem AB, ad CD, ita eſt rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, ſi A B, ponatur baſis rectanguli; Item vt E, ad F, ita eſt I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua ſunt, in qua tres numeri G, I, H Igitur ex æquo, per lemma propoſ. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod eſt propoſitum.



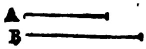
A BC DA BC D
E, 2. F, 3.
C, 4. I, 6. H, 9.

Sit ſecundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, eſſe longitudine commenſurabiles. Sin enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex BD,
c 20. *ſexti.* vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: *c* Habet
d 11. *oct.* autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem duplicatã lateris AB, ad latus CD. *d* Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales ſunt. Quare cum rectæ AB CD,
e 6. *decimi.* proportionem habeant, quam numeri E, F, *e* ipſæ commenſura-
f 1. *ſexti.* biles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

Aliter. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. *f* Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rurſum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt ſupra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD. Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt ſupra oſtendimus; poniturque quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc eſt, vt E,
g 6. *dec.* ad F; *g* ideoq; AB, CD, rectæ proportionem habentes quã numeri E, F, commenſurabiles ſunt longitudine Quod eſt propoſitũ.

SINT

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratū. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commenſurabiles, vt iam eſt demonſtratum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim longitudine incommenſurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratū ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod eſt propoſitum.



QVARTO, ac poſtremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine eſſe incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt eſt demonſtratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe: Quæ vero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ vero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commenſurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. vt in hoc theoremate demonſtratum eſt, hoc eſt, ſimpliciter quam numerus ad numerum: *a* ipſa commenſurabilia erunt; *b* Quare lineæ longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. a *6. dec.* b *3. def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed tamen quam numerus ſimpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commenſurabiles ſunt, *d* cum earum quadrata commenſurabilia ſint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum; perſpicuum eſt, lineas potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine commenſurabiles eſſe. Solum enim eæ lineæ potentia commenſurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque ſunt commenſurabiles, vt conſtat ex ſecunda parte huius theorematis. c *3. def.* d *6. decimi.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ſed tamen, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidem ſunt longitudine, at potentia commenſurabiles, vt modo diximus, liquido conſtat, lineas longitudine incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles eſſe,

les eſſe, ſolum enim ex lineæ longitudine incommenſurabiles, quarum
a 4. defin. quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a po-
b 8. decimi. tentia quoque incommenſurabiles ſunt, b cum earum quadrata incom-
menſurabilia ſint.

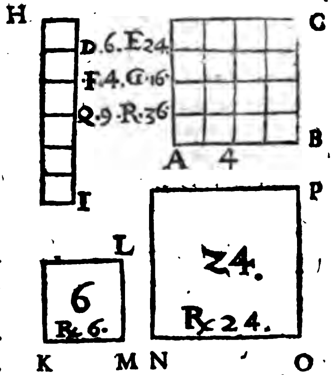
POSTREMO lineas potentia incommenſurabiles, eſſe omnino & longitudine incommenſurabiles, perſpicuum eſt. Nam ſi longitudine eſſent commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarii. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim potentia incommenſurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt.

SCHOLIVM.

VT autem ſcopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter conſideranda ſunt hæc, quæ ſequuntur. Primum lineas rectas longitudine commenſurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non ſolum eſſe eas, quæ numeris exprimi poſſunt, ſi cum linea Rationali propoſita comparentur: quales ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſita: (eſt enim recta A B, 2, & C D, 3.) verum etiam illas, quæ nullis poſſunt numeris efferri, ſi cum Rationali linea propoſita conferantur: Deinde è contrario, quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, ſeu latera ex ſecunda theorematis parte, longitudine ſunt commenſurabilia, non ſolum ea eſſe intelligenda, quæ continent totidem quadratas menſuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ reſoluitur, quot ſunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipſis proportionem habentibus: cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcripta (continet enim quadratum ex A B, quatuor menſuras quadratas, & quadratum ex C D, nouem: quot nimirum vnitates ſunt in quadratis numeris G, H) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures menſuras quadratas complectuntur, quam ſunt vnitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali lineæ propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles: Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, expreſſa numero 4. cuius quadratum A C, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, c vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus
c 26. octaui. *numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur*

matur rectangulum H I, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur: a æqui- a 14. ſecundi
pſi H I, quadratum æquale conſtituatur K L, cuius latus K M. Poſtremo per ea, quæ in corollar. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita ſe habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24 ita quadratum K L, ad quadratum N P, per conſtructionem: continet autem quadratum K L, 6. menſuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (conſtructum enim eſt quadratum K L, æquale rectangulo H I, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris) continebit quadratum N P, earundem menſurarum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntque lineæ Rationali A B, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex corollar. propoſ. 20. libr. 6. duplicatam laterum K M, N O, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. b Quare longitudine commenſurabiles ſunt b 6. decimi.
rectæ K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi conſiderentur eædem lineæ K M, N O, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant ſubduplam, ſi K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis A B, imo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.



RVRSVS

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G: (Nam KL, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata KL, NP, quam ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus conſtituatur; manifeſtum eſt, in hoc theoremate intelligenda quoque eſſe quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas menſuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propoſita. Quod ſi eadem quadrata KL, NP, conſiderentur abſolute, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam ſi recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum KL, quatuor menſuras quadratas, & quadratum NP, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eadem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos: cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſunt 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus: Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſita, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpenumero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationa-

Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationales ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

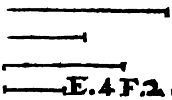
COLLIGIT *Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus: Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis: vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabilia. Hoc etiam nos demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. libr. 8. Quod tamen clarius oſtendet Euclides propoſ. vltima huius lib.*

THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis: & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, ſitque A, prima ſecundæ B, commenſurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A, & B, inter ſe commenſurabiles ſunt, *a* habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. *b* Quare C, & D, cõmenſurabiles inter ſe ſunt. *a 5. decimi.* *b 6. decimi.*

A
B
C
D



E. 4 F. 2.

SED ſit iam A, ipſi B, incommenſurabilis. Dico & C, ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Quoniam enim A, & B, incommenſurabiles ſunt, *c* non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam numerus ad numerum. *d* Quare C, & D, incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. *c 7. decimi.* *d 8. decim.*

SCHOLIVM.

QVOD *ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia*

quartæ longitudine commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus, poſteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

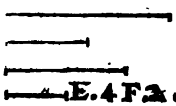
SI autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum; erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commenſurabilis eſt potentia ipſi B, a erunt earum quadrata commenſurabilia, b ac propterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum. c Eſt autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum quadrata figuræ ſimiles ſimiliterque deſcriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. d Quare commenſurabilia erunt: e Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus: Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ. 8. huius lib. Sunt autem potentia commenſurabiles, vt oſtendimus: Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

a 3. def.
b 5. decimi.
c 22. ſexti.
d 6. decimi.
e 3. def.

EADEM ratione, ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles: erunt ipſarum potentia commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentia tantum commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida: ſequetur nihilominus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ longitudine ſint commenſurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum: f atque adeo commenſurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommenſurabiles ſint, ſiue potentia commenſurabiles exiſtant, ſiue non, non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum,

f 6. decimi.

A
B
C
D

E.4F.2

rum, vt

rum; vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quã numeri ad numerum. a Quare incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum. a 8. dec.

EODEM modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperficies, vel ſolidæ, poſteriores vero duæ, lineæ, demonſtrabimus, ſi plana, vel ſolida commenſurabilia ſint, vel incommenſurabilia, lineas longitudine commenſurabiles eſſe, vel incommenſurabiles. Si enim plana, ſolidave commenſurabilia ſint, b habebunt ipſa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipſis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commenſurabiles erunt, vt diximus in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incommenſurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipſis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommenſurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitum. b 5. decimi.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani non ſimiles, per ea, quæ ad finem libr. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunq; numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad

quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non ſit ſicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perſpicuum igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles; quoniam latera proportionalia non ſunt, quod facere oportebat.

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

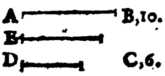
HÆC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errant autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpenumero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. vt conſtat: quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. non ſint proportionalia lateribus poſterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, nõ autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunq; duobus lateribus alterius. qua de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 8.

x.
xj.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta propoſita A, cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autẽ proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerum quadratũ.



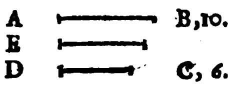
Igitur *a* rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. *a 9. dec.*
Quod autem tantum lõgitudine ſint incommenſurabiles; patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, *b* ipſa commenſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantum incommenſurabiles ſunt. *b 6. decimi.*

SIT iam eidem rectæ propoſitæ A, inuenienda linea incommenſurabilis longitudine, & potentia. *c* Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommenſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incõmenſurabilem eſſe longitudine, & potẽtia. Quoniam enim eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum: *d* erit & quadratum ex A, incommenſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia ſunt incommenſurabiles; ac proinde ex coroll propoſ. 9. huius libr. & omnino longitudine incõmenſurabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incõmenſurabilis longitudine & potentia. Quocirca propoſitæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonſtrandum. *c 13. ſexti.* *d 10. dec.*

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſura cæterarum ſumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.

CÆTERVM ex demonſtratione huius theorematis liquido conſtat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commenſurabiles, vel quod idem eſt, inter duas longitudine tantum incommenſurabiles, eſſe vtrilibet illarum incommenſurabilem longitudine & potentia; atq; adeo appellari Irrationalem, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, ſunt longitudine tantum incommenſurabiles, vel commenſurabiles potentia tantum, demonſtrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem eſſe, ipſi incommenſurabilem longitudine, & potentia; Eodemq; argumento oſtendemus, eandem longitudine, & potentia ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, ſint continuè proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A. Eſt autẽ recta D, rectæ A, incommenſurabilis longitudine. e Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommenſurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incommenſurabiles ſunt potentia. atq; adeo & longitudine, per coroll. propoſ. 9 huius lib. *e 10. dec.*



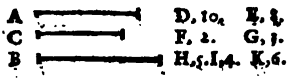
In codicibus vulgatis præponitur hæc undecima propoſitio à Theone propoſitioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum eſſe puto, cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demonſtretur. vt ex dictis apparet.

xiij. viij.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

Sit vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cum enim A, &
a 5. decimi. C, ſint commenſurabiles, *a* habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rurſus quia C, B, commenſurabiles ſunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam
b 4. oct. numerus F, ad numerum G, *b* ſumantur tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; ſitque H, ad I, vt D, ad E, hoc eſt, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H,
c 6. decimi. K, *c* inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.



SCHOLIVM.

Quod ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, atque A, & B, ipſi C, longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoque A, & B, inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6 diximus. Si vero A, & B, fuerint ipſi C, potentia commenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles, potentia. Cum enim A, & C, ſint potentia
d 5. dec. *commenſurabiles, d erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad*
e 4. oct. *G. e Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps portionalibus: erit rurſum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad nu-*
f 6. dec. *merum K. f Quare quadrata ex A, & B, commenſurabilia ſunt,*

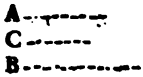
atque

atque adeo lineæ A, B, potentia commenſurabiles. Non tamen ex hoc ſequitur, A, & B, potentia tantum eſſe commenſurabiles. Poſſunt enim eſſe duæ lineæ, longitudine inter ſe commenſurabiles, licet vtraq; cuipiã alteri lineæ potentia tantum ſit commenſurabilis; quales ſunt duæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum Rationali expoſitæ commenſurabiles, quas quidem inueniemus poſtea in ſcholio 2. propoſ. 19. huius lib.

SED *& conuerſum quodammodo huius theorematis demonſtrabimus hoc modo.*

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera vero ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis.

SINT *enim A, & B, commenſurabiles, ſitque A, ipſi C, commenſurabilis. Dico & B, eidem C, commenſurabilem eſſe. Cum enim tam B, quam C, ipſi A, ſit commenſurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

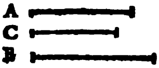


QVOD *ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine, ſit autem A, ipſi C, commenſurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commenſurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipſi A, longitudine ſit commenſurabilis, erunt etiam B, C, inter ſe commenſurabiles longitudine, vt oſtendimus. At vero ſi lineæ A, & B, potentia tantum ſint commenſurabiles, & A, ipſi C, cõmenſurabilis ſiue longitudine, & potentia, ſiue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia eſſe commenſurabilem; quia vtraq; B, C, ipſi A, hac ratione potentia eſt commenſurabilis ex hypotheſi. Non autem colligere licebit, ſi A, ipſi C, commenſurabilis ſit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commenſurabilem eſſe, quia non vtraq; B, C, ipſi A, longitudine commenſurabilis eſt, ſed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypotheſi conſtat.*

THEOR. 10. PROPOS. 13. xiij. o.

SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, ſit ipſi C, commenſurabilis, & B, eidem C, incommenſurabilis. Dico A, & B, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Si enim B, dicatur eſſe commenſu-



a 12. decimi. rabilis ipſi A; cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; *a* erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Si magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, b *oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis; erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoq; B, & C, potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis.*

b 12. dec.

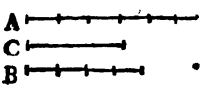
QVONIAM *vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac ſeriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.*

xiij.
viij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

Si ſint autem magnitudines commenſurabiles; altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommẽſurabilis ſit alteri cuipam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis



c 12. decimi. ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cum & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; *c* erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum, Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commẽſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines cõmenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hic *quoque, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, cõmenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue lon-*

ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, a eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis) Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, ipſi C, longitudine incommenſurabilis. Quod ſi A, & B, commenſurabiles ſint potentia tantum, & A, ipſi C, potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent commenſurabiles; b & A, C, potentia commenſurabiles eſſent. (cum hoc poſito, vtraque A, C, ipſi B, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur.

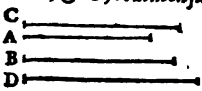
a 12. decimi

b 12. dec.

COLLIGVNT *porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.*

QVÆ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles, & inter ſe incommenſurabiles erunt.

SINT *duæ magnitudines incommenſurabiles A, B, quibus commenſurabiles ſint C, & D, nempe C, ipſi A, & D, ipſi B. Dico C, & D, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam enim A, & C, commenſurabiles ponuntur, & eſt A, ipſi B, incommenſurabilis; c erit quoq; reliqua C, eidem B, incommẽſurabilis. Rurſus quia D, & B, commenſurabiles ponuntur, & eſt B, oſtenſa ipſi C, incommenſurabilis; d erit & reliqua eidem C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.*



c 14. dec.

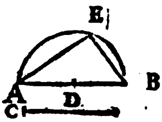
d 14. dec.

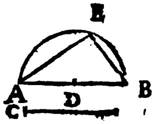
SI *autem magnitudines A, B, C, D, ſint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommenſurabiles, vel longitudine & potentia, ſint autem C, D, ipſis A, B, longitudine incommenſurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommenſurabiles. Si vero A, & B, incommenſurabiles ſint potentia, & ipſis potentia tantum commenſurabiles C, & D; oſtendemus ſimiliter C, & D, potentia eſſe incommenſurabiles; vt perſpicuum eſt.*

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor.

QVAMVIS *id, quod lemma hoc proponit, oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatq; inue-*





ſire, quo AB, plus poſſit quam C. Diuiſa AB, biſariam in D, deſcribatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, ſemicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturq́; recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ EB. b Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit; c erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atq; idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum. Similiter

a 1. quarti.
b 31. tertii.
c 47. primi.

DVABVS datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ ſi coniungãtur ad angulum rectum E poterit eas recta ducta AB, d quippe cum quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex AE, EB.

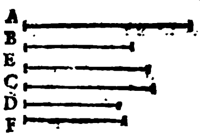
d 47. primi.

XIV. xij.

THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, poſſitque A, prima plus quam B, ſecunda quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſſit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C. Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim eſt vt A, ad B, ita C, ad D; e erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum D. Eſt autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothe-



e 22. ſexti.

potheſin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F. ad quadratum ex D; Et diuidendo, vt quadratum ex E ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D, *a* Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoq; vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoq; ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. a 22. ſexti.

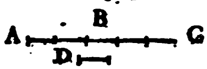
SCHOLIVM.

Eodem argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantum commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. *huius lib. ſcripſimus.*

THEOR. 13. PROPOS. 16. XV. IX.

Si duæ magnitudines cõmenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines cõmenſurabiles erunt.

Componantvr duæ magnitudines commenſurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipſarum AB, BC, cõmenſurabilem eſſe. *b* Sit enim ipſarum AB, BC, commmunis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, *c* metietur quoque D, totam AC, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur AC, & A; erunt AC, AB, commenſurabiles: Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, AC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit. b 3. decimi. c 1. pronun.



Sed iam tota AC, ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi AB. Dico & AB, BC, inter ſe commenſurabiles eſſe. *d* Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; *e* metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commenſurabiles erunt AB, BC, inter ſe. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat. d 3. dec. e 9. pronun.

COROL-

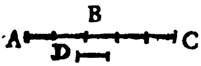
COROLLARIVM.

HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ commenſurabilem eſſe. Vt ſi A C, ipſi A B, ſit commenſurabilis, eſſe quoque eandem A C, reliquæ BC, commenſurabilem. Nam vt in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius A C, & ablatæ AB, cum mentiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commenſurabiles ſunt AC, BC. Quod eſt propoſitum.

xvj. THEOR. 14. PROPOS. 17.
ix.

SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommenſurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipſarum AB, BC, incommenſurabilem eſſe. Si enim non eſt vtrique incommenſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt, nempe ipſi AB, a ſitque D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramq; AB, BC, erunt AB, BC, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commenſurabilis eſt AC, ipſi AB: Eademq; ratione neq; ipſi BC, commenſurabilis erit. Quare vtriq; ipſarum AB, BC, incommenſurabilis eſt.



a 3. decimi.
b 3. pronun.

SED iam tota AC, compoſita ex AB, BC, incommenſurabilis ſit vnni ipſarum componentium, nempe ipſi AB. Dico quoque AB, BC, incommenſurabiles eſſe. Si enim ſint commenſurabiles, c erit quoque tota AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim AC, alteri ipſarũ, nempe ipſi AB, incommenſurabilis. Non ergo commenſurabiles ſunt AB, BC. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi AC, ipſi BC, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incõmenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

c 16. dec.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ incommenſurabilem eſſe. Nempe ſi AC, incommenſurabilis ſit ipſi AB, eſſe quoque eandem AC, reliquæ BC, incommenſurabilem. Si enim AC, ipſi BC, foret commenſurabilis, eſſet quoque AC, ex coroll. præcedentis propoſ. reliquæ AB, commen-

commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo AC, ipſi BC, commenſurabilis, ſed incommēſurabilis. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, in duabus proximis antecedentibus propoſitionibus, earumq; corollariis, ſi de lineis agatur, intelligendas eſſe lineas longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Aſſumitur enim ad vtriuſq; propoſitionis demonſtrationem communis menſura D, *&c. quam quidem ſolum lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles habēt, vt ex defin. apparet.*

LEMMA I.

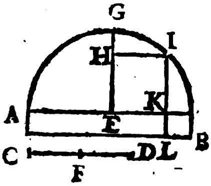
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammū applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

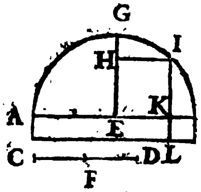
HOC *lemma demonſtrauimus nos in ſcholio propoſ. 28. lib. 6.*

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, abſolui poſſit ex propoſ. 28. libr. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea deſcripti minor ſit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteque figura quadrata, vt vult propoſ. illa 28. libr. 6. hoc eſt, quadratum ex dimidio minoris lineæ deſcriptum, (quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex ſcholio propoſ. 4. libr. 2.) minus ſit quadrato ex dimidia parte maioris deſcripto; (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris, deficitque figura quadrata.) Quamuis, inquam, abſolui hoc poſſit per propoſ. 28. libr. 6. licet tamen idipſum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AC, CD, *quarum* AB, *maior ſit, oporteatque ad* AB, *applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-*





mum æquale ſit quartæ parti quadrati ex rectâ CD, deſcripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, ſemicirculus AGB: & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quàm tota CD, erit quoque AE, dimidia ipſius AB, hoc eſt, EG, ipſi AE, æqualis, maior quàm CF, dimidia ipſius CD. Poſita igitur EH, æqualis ipſi CF. agatur per H, ipſi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpendicularis, & ſit KL, ipſi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim KI, media proportionalis eſt inter AK, KB, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. tradidimus; a 17. ſexti *a erit rectangulum ſub AK, KB hoc eſt rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc eſt, quadrato ex EH:* b 34. primi *b (eſt enim KI, ipſi EH, æqualis, ob parallelogrammum EI,) hoc eſt, quadrato ex CF: Eſt autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD: quod quadratum ex CD, per ſcholium propoſ. 4 lib. 2. quadruplum ſit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficienſque quadrato BL, æquale eſt quartæ parti quadrati ex CD, deſcripti: Quod eſt propoſitum.*

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus cõtentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quam quadratum à dimidia linea deſcriptum.

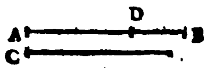
SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque; cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius ſit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, ſit EH, æqualis ipſi CF. Deinde acta HI, parallela ipſi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis oſtendemus, vt prius, rectangulum ſub partibus AK, KB, æquale

æquale eſſe quadrato ex IK, hoc eſt, quadrato ex CF, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale eſt poſitum quadratum ex CF. Quod eſt propoſitum. Diximus autem, rectilineum datum non debere eſſe maius, quam quadratum ex dimidia linea deſcriptum, quia ſi maius eſſet, eſſet quoque recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abſcindi nõ poſſet recta ipſi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT *duæ rectæ inæquales* AB, *&* C; *& ad maiorem* AB, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ſitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore* C, *deſcripti, ita vt* DB, *latus ſit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, Dico ſegmenta* AD, DB, *inæqualia eſſe.*



Si enim AD, DB, *ſegmenta dicantur eſſe æqualia: cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad* AB, *deficienſque figura quadrata ex* DB, *deſcripta, æquale ſit rectangulo ſub* AD, DB, *ſit autem quod ſub æqualibus* AD, DE, *quadratum: erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* AD, *dimidio ipſius* AB, *deſcriptum: atque adeo ex ſcholio propoſ. 4. libr. 2. quadratum ex* AB, *quadruplum erit ipſius parallelogrammi: Eſt autem & quadratum ex* C, *per hypotheſin, quadruplum eiuſdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarum ex* AB, *&* C, *æqualia ſunt, atque rectæ* AB, *&* C, *æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim inæquales, &* AB, *maior. Inæqualia igitur ſunt ſegmenta* AD, DB: *Quod eſt propoſitum.*

HOC *facile etiam apparet ex conſtructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abſciſſa ſit per conſtructionem,* EH, *æqualis dimidiatæ parti ipſius* CD, *nempe ipſi* CF, *ductaque* HI, *parallela ipſi* AB, *& tandem demiſſa perpendicularis* IK, *vt partes factæ ex applicatione ſint* AK, KB: *manifeſtum eſt* AK, KB, *ſegmenta eſſe inæqualia, cum* AB, *in* E, *ſecta*

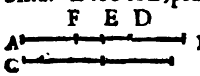
ſit bi-

ſit biſariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

xvij.
xiij.
SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex minore C, deſcripti, per lemma ſecundum præcedentis propoſ. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum ſub A D, D B, faciatque ſegmenta A D, D B, longitudine commenſurabilia. Dico A B, plus poſſe quam C, quadrato lineæ longitudinè



ſibi commenſurabilis. Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propoſ. A D, maior eſt, quam D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipſi E D, æqualis ſumatur E F. Quo facto, cum totæ E A, E B, æquales ſint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuiſa eſt bifariam in E, & non bifariam in D,

a 5. ſecundi. a erit rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadratum rectanguli ſub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B, Eſt autem quadruplo rectanguli ſub A D, D B æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectãgulum ſub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale eſt quadratum ex F D, (quadratum enim ex F D, quadruplum eſt ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cum F D, dupla ſit ipſius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale eſt quadratum ex A B, (quod quadratum ex A B, quadruplum ſit per ſcholium propoſ. 4. libr. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipſius A B) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia ſunt quadrato

ex A B:

ex AB; Ac proinde recta A B, plus poteſt quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonſtrare oportet longitudine commenſurabilem eſſe ipſi AB. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commenſurabiles: *a* erit quoque tota A B, parti D B, commenſurabilis longitudine. Eſt autem & ipſi D B; compoſita ex D B, A F, longitudine commenſurabilis: (quod compoſita ex D B, A F, dupla ſit ipſius D B,) Igitur cum vtraque AB, & compoſita ex D B, A F, longitudine ſit commenſurabilis ipſi D B, *b* erunt quoque AB, & compoſita ex D B, A F, longitudine inter ſe commenſurabiles; Ac propterea cum A B, compoſita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. commenſurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D, longitudine ſibi commenſurabilis.



a 16. decimi

b 12. decimi

SED iam A B, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine eſſe commenſurabiles. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit recta A B, ipſi F D, longitudine commenſurabilis. Igitur cum tota A B, compoſita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, commenſurabilis ſit longitudine ipſi F D; erit eadem A B, longitudine commenſurabilis reliquæ compoſitæ ex A F, D B, per coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem & compoſita ex A F, D B, ipſi D B, longitudine commenſurabilis, cum ipſius ſit dupla. Igitur cum vtraque A B, D B, longitudine ſit commenſurabilis compoſitæ ex A F, D B; *c* erunt quoque A B, D B, longitudine inter ſe commenſurabiles; Atque adeo cum tota A B compoſita ex A D, D B commenſurabilis ſit longitudine ipſi D B; *d* erunt ipſæ A D, D B, longitudine quoque inter ſe commenſurabiles. Quocirca ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 12. decimi

d 16. decimi

THEOR. 16. PROPOS. 19.

xviij.
xiv.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrãmum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum

eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applicetur ad A B, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommenſurabiles. Dico A B, plus poſſe quam C; quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis.



Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A, longitudine eſſe incommenſurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incom-

à 17. decim. menſurabiles; a erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommenſurabilis. Sed D B, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex D B, A F, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commenſurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipſa D B, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ

b 14. decim. A B: b erit quoque reliqua compoſita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cum A B, compoſita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex A F, D B, erit eadem A B, per coroll. propoſ. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommenſurabilis Ergo A B, plus poteſt quam C, quadrato rectæ E D, longitudine ſibi incommenſurabilis.

IAM vero A B, plus poſſit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, eſſe incommenſurabiles longitudine. Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius, rectam A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus poſſe quam C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis: erit A B, ipſi F D, incommenſurabilis longitudine. Igitur cum tota A B, compoſita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna longitudine incommenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem A B, per corollar. propoſ. 17. huius libr. & reliquæ compoſitæ ex A F, D B, longitudine

incom-

incommenſurabilis: Eſt autem compoſita ex A F, D B, ipſi D B, longitudine commenſurabilis, cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commenſurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B, ipſa compoſita ex A F, D B, longitudine incommenſurabilis ſit rectæ A B; *a* erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommenſurabilis: Ac proinde cum tota A B, compoſita ex A D, D B, incommenſurabilis ſit ipſi D B, longitudine; *b* erunt & ipſæ A D, D B, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 14. decimi

b 17. decimi

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus: nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe, potentia vero commenſurabiles, non omnino & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſita Rationali aliqua linea commenſurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſita Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quod ſi expoſita Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis: dicetur & ſic Rationalis, potentia tantum ipſi commenſurabilis.

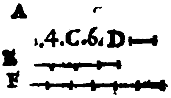
LEMMA II.

EX PROCLO. *Rationales vocat eas lineas, quæ expoſita Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſita Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum commenſurabiles: atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales ſi*

commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum: Et ſiquidem longitudine, dicuntur & ipſa Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commenſurabiles eſſe: Si vero potentia inter ſe ſolum ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſa quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

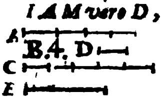
SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium, altera æqualis eſt expoſita Rationali: ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expoſita æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſita Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum vnitates ſunt



in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſita Rationali A, & quarum vna nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

IAM vero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G quorum neuter idem ſit qui B, ita vt

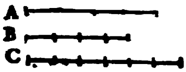


vtraque linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

a 11. dec. *POSTREMO expoſita Rationali A, a inueniatur recta B, longitudine tantum incommenſurabilis; quæ ſecetur in quotcunque*

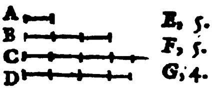
partes

partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcumque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolum eſſe commenſurabiles.



Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeo & potentia; a Igitur quadrata a 12. decimi.
rectarum A, & C, commmenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; b erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommen- b 12. dec.
ſurabilis. Eſt ergo C, ſolum potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, id efficiet hoc modo; Sumpta menſura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.

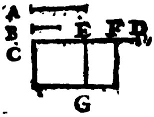


CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles, facile hoc modo demonſtrabimus. c Quoniam Rationales lineæ ſunt, quæ expoſitæ Rationa- c 6. deſin.
li ſunt commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; d quæ autem eidem commenſurabiles, inter ſe commenſurabi- d 12. ſexti.
les ſunt; manifeſtum eſt, Rationales lineas quaſcunque inter ſe commenſurabiles eſſe.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit à prima, & rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & B, comprehenſum. Ex



quantacunque enim linea recta CD, abſcindatur CE, ipſi A, æqualis, & EF, ipſi B. Deinde ſuper CE, deſcribatur quadratum CG, perficiaturq́; rectangulum GF, contentum ſub CE, & EF, hoc eſt, ſub A, & B. a *Quoniam igitur eſt vt CE, ad EF, hoc eſt, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, ſub A, & B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, vt quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.*

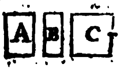
a 1. ſexti.

EODEM *modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod eſt propoſitum.*

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali ſpacio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT *ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur.*



Quoniam igitur B, Rationale eſt, b *erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B,* c *inter ſe quoq; commenſurabilia erunt; at proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripta commenſurabile,* d *Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*

b 9. def.
c 12. dec.
d 6. def.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

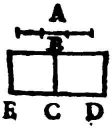
XIX.
XV.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorum, (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorum, quos in ſcholio 2. antecedentis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarum BC, CD, Rationali expoſitæ A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei vtraque commenſurabilis ſit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico

BD, re-

BD, rectangulum Rationale eſſe. Deſcribatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expoſitæ A, commẽſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum: *a* erit quoque quadratum BE, ex BC, deſcriptum quadrato ex A, cõmenſurabile: *b* Eſt autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. *c* Igitur & BE, illi commenſurabile, Rationale eſt. Quia vero BC, hoc eſt, EC, & CD, longitudine commenſurabiles ſunt, (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter ſe longitudine cõmenſurabiles) *d* & eſt vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; *e* erunt quoq; EB, BD, commenſurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedẽtis propoſ. BD, Rationali BE, commenſurabile, Rationale eſt. Quod igitur ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis, &c. Quod erat demonſtrandum.

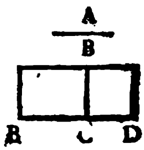


a 3. *defin.*
b 8. *defin.*
c 9. *def.*
d 1. *ſexti.*
e 10. *dec.*

THEOR. 18. PROPOS. 21.

XX. XVI.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.



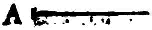
SIT rurſum expoſita Rationalis A, & alia Rationalis BC, ſecundum aliquem modorum, quos in ſcholio 2. propoſitionis 19 expoſuimus, hoc eſt, ſiue BC, æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non, commenſurabilis tamen ei vel lõgitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, commenſurabilem longitudine. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BE; quod ſimiliter, vt in antecedenti propoſ. oſtendemus Rationale eſſe. Quia igitur BE, BD, Rationalia ſunt, *f* ipſa commenſurabilia erunt quadrato ex linea Rationali expoſita A, deſcripto; *g* Ac propterea & commenſurabilia inter ſe erunt: *h* Eſt autem vt BE, ad BD, ita EC, hoc eſt, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commenſurabiles ſunt longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo CD, ipſi BC, commenſurabilis longitudine; *i* ſed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.

f 9. *def.*
g 12. *dec.*
h 1. *ſexti.*
i 6. *def.*

LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT *recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe.*



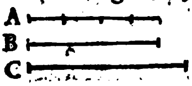
Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. *huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.*

HOC *idem conſtat ex definitione* 11. *huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.*

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

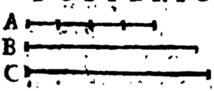
DVO *genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſita Rationali, aut neutra.*



Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, a *inueniatur C, longitudine tantum incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum incommenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſita Rationali A, æqualis eſt.*

a 11. *dec.*

POSTERIORIS *autem generis lineas hac arte reperiemus.*



Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantum incommenſurabilis b *inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles.*

b 11 *decimi.*

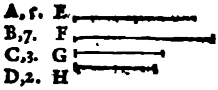
Quod

Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſita Rationali A, ſit potentia commenſurabilis; a erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles. a 6. defin.

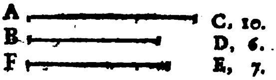
SCHOLIVM.

QVOD *ſi inueniendæ ſint quotcunq; lineæ Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur in hac ratione.*

SVMANTVR *per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propoſ. 6. huius libr. oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H. Rationales eſſe, & potentia tantum commenſurabiles inter ſe. Quod enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtructione; ſimiliterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterq; quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D) b erunt ipſa inter ſe commenſurabilia; ac propterea & rectæ ipſæ potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem libr. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. c Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.* b 6. decimi. c 9. decimi.



QVOD *ſi propoſitis quotcunq; Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propoſitæ duæ*



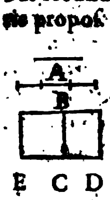
Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quorum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, a 6. decimi. *a commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem libr. 8. oſtendimus; (quod D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoq; plani non ſimiles, ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib 8. oſtendimus, proportionem* b 9. decimi. *non habeant, quam quadratus ad quadratum) b erunt rectæ E, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia ſolum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia tantum commenſurabiles: Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demõſtrauimus de numeris D, & E) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

xxj.
xix.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorũ, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum BD, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi BD, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE; quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. c Et quoniam eſt vt EC, hoc eſt, BC, ad CD, vt BE, ad BD: Eſt autem BC, ipſi CD, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipſi



c 1. ſexti.

BD, in-

BD, incommenſurabile. a Quare cum BE, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A, ſit autem BE, ipſi BD, incommenſurabile; b erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, eidem BD, incommenſurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expoſitæ incommenſurabile exiſtens, c Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum BD, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis. a 9. def. b 14. dec. c 10. def.

Vocatur autem hæc linea potens ipſum BD, Media, d propterea quod media proportionalis eſt inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter ſe commẽſurabiles, quippe cum eius quadratum æquale ſit rectangulo BD ſub ipſis BC, CD, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod monſtrandum erat. d 17. ſexti.

SCHOLIVM.

Itaque omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur. e Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus: ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur. e 17. ſexti.

Vt autem recte hoc loco monet Campanus, non ſolum recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continuè proportionales, quales ſunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq́; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum medium proportionale eſt inter quadrata rectarum BC, CD, ideoq́; Medium appellari poteſt.

Hoc autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quale eſt Medium BD. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Mediis

Mediis longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit.] Itaque non reciprocantur, rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum, ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

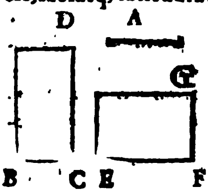
V N D E *Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum cõmenſurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.*

xxij. xx.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia
a 45. primi. tantum *a* applicetur que ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, longitudine incommenſurabilem.



Quoniam enim A, Media eſt ipſa poterit rectangulum ſub duab. rectis Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus cõtentum, alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, ſub Rationalibus EF, FG, potentia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum BD, æqualia erunt BD,
b 14 ſexti. & EG, *b* lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos,

gulos, nempe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD; *a* Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratum ex BC, commenſurabile eſt quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF, ponantur Rationales: atque adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur *b* & quadratum ex FG, commenſurabile erit quadrato ex CD: proptereaque & rectæ FG, CD, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expoſitæ Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis; erit quoque CD, expoſitæ Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommenſurabilis ipſi BC. Quoniam enim EF, FG, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt EF, ad FG, ita quadratum ex EF, ad rectangulum EG, ſub EF, FG, contentum, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. *c* erit quadratum ex EF, incommenſurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex EF, commenſurabile eſt quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commenſurabile ſit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato ex EF, incommenſurabile; *d* incommenſurabilia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Eſt autem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad rectam BC. *e* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo eſt CD, & Rationali BC, longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 22. ſexti. b 10. decimi. c 10. decimi. d 13. decimi. e 10. decimi.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, ſi ipſis BC, & A, f ſumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales ſint; g erit rectangulum BD, ſub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

f 11. ſex. g 17. ſexti.

HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuſpiam lineæ rectæ.

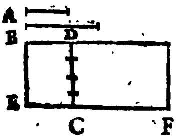
PORRO ex hoc theoremate manifeſtum eſt, omne Medium, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale,

tionale; longitudine lineæ Rationali incommenſurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunq; Medium reduci poteris ad Medium contentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

Mediæ commenſurabilis, Media eſt.

Sit Mediæ A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Mediam eſſe. Expoſita
a 45. *primi.* enim ſit Rationalis C D, *a* ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; *b* erit C E, Rationalis ipſi C D, lon-
b 23. *decimi.* gitudine incommenſurabilis. Rurſus ad C D, Rationalem *c* applicetur rectangulum D F,
c 45. *primi.* quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, D E, D F, commenſurabilia. *d* Eſt autem vt D E, ad D F, ita



d 1. *ſex.* recta E C, ad rectam C F. *e* Igitur E C, C F, longitudine ſunt com-
e 10. *decimi.* menſurabiles: Sed E C, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi
f 14. *decimi.* C D, incommenſurabilis. *f* Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ C D, ſit commenſurabilis; (Nam cum E C, C F, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & E C, ipſi C D, commenſurabilis ſaltem potentia, quod Rationalis ſit; erit & C F, eidem C D, commenſurabilis potentia ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus) erunt C D, C F, Rationales po-
g 22. *decim.* tentia tantum commenſurabiles, *g* Ac proinde recta B. potens rectangulum D E, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus C D, C F, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabilis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile Medium eſſe. Poſtquam enim demonſtratum eſt D F, commenſurabile eſſe Medio D E, oſtenſum ex eo mox fuit D F, eſſe quoque Medium, nimirum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus C D, C F, contentum. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

Sit ſpatium D F, ſpatio Medio D E, commenſurabile. Dico & D F, Medium eſſe. Poſſit enim A, Media ipſum D E, Medium. (Nam cum D E, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus) & B, ipſum D F. Quoniam igitur D E, D F,

commen-

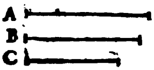
commenſurabilia ſunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipſis æqualia, cõmenſurabilia. Quare A, B, rectæ potentia ſaltem ſunt commenſurabiles; Atque idcirco exiſtente A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media; vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim ſpatium, quod poteſt Media, Medium appellatur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius libr. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed & potentia. Vniuerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.



SIT Media aliqua linea A *, cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles* B, C *: illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum: a erit vtraque* B, C, *Mediæ* A, *commenſurabilis, Media. Cum ergo* A, B, *ſint longitudine commenſurabiles: &* A, C, *potentia tantum: erunt inuentæ* A, B, *Mediæ longitudine commenſurabiles: &* A, C, *Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.* a 24. *decimi.*

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commenſurabilis, Media ſit: non tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis: cum duæ Mediæ dari poſſint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36 huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles.

THEOR.

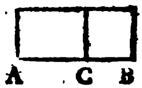
xxiv. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

Qvod ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

Continetvr rectangulum AD, ſub Mediis AC, CD, longitudine commenſurabilibus. Dico AD, Medium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratum BD, quod erit Medium.

a 1. ſex. *a* Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autem AC, CB, hoc eſt, AC, CD, longitudine cōmenſurabiles; erunt AD, DB, commenſurabilia. Quare ſpatium AD, Medio DB, commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. præcedentis propoſ. Quod ergo ſub Mediis longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.



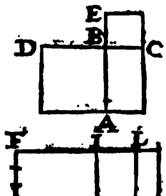
xxv. xxiiij.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

Qvod ſub Mediis potentia tantum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

Sit rectangulum AC, comprehenſum ſub Mediis AB, BC, potentia tantum commenſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus, cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG,

b 45. primi. *b* ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & deniq; ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto: eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero AD, CE, Media ſunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad



c 34. primi. Rationales FG, KL, (*c* eſt enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis) faciantque latitudines GH, KM,

d 23. decimi. *d* erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipſi FG, ſeu KL, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo & ipſis æqualia rectangula

e 1. ſex. FH, LM, commenſurabilia: *e* Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta

f 10. decimi. GH, ad KM. *f* Igitur GH, KM, longitudine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare GH, KM, Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commēſurabiles, Rationali vero FG, ſolum commenſa-

menſurabiles potentia. cum et oſtenſæ ſint longitudine incom- a 20.
menſurabiles; a Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, K M, decimi.
Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E, (quod
D B, B C, ipſis A B, B E, ſint æquales vtraque vtrique) b & vt D B, b 1. ſext.
ad B C, ita A D, ad A C; & vt A B, ad B E, ita A C, ad C E; erit quo-
que vt A D, ad A C, ita A C, ad C E, atque adeo A D, A C, C E,
proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, propor-
tionalia erunt: c Habent autem rectæ G H, H K, K M, eaſdem
proportiones, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G c 1. ſexti.
H, H K, K M, proportionales ſunt; d proptereaque rectangulum
ſub G H, K M, quadrato ex H K, æquale eſt. Eſt autem rectangu- d 17.
lum ſub G H, K M, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratum ex ſexti.
H K, Rationale eſt; ideoque & recta H K, Rationalis erit: e & ob
hoc ipſi F G, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi H I, commenſurabi- e 6. def.
lis vel longitudine, & potentia, vel ſolum potentia. Et ſi quidem
H K, ipſi H I, longitudine ſit commenſurabilis, f rectangulum H f 20.
L, ſub Rationalibus H I. H I, longitudine commenſurabilibus decimi.
contentum, hoc eſt, A C, illi æquale, erit Rationale. Si vero H K, i-
pſi H I, potentia ſolum cõmenſurabilis ſit, g erit rectangulum H L, g 22.
ſub Rationalibus H I. H K, potentia tantum commenſurabilibus decimi.
contentum, hoc eſt, A C, illi æquale, Medium. Eſt ergo A C, rectan-
gulum ſub Mediis A B, B C, potentia tantum commenſurabili-
bus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod ſub
Mediis potentia tantum commenſurabilibus, &c. Quod erat o-
ſtendendum.

SCHOLIUM.

*Facilius quam ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad H I, rectangu-
lum ipſi A C æquale, h ſi tribus rectis H I, A B, B C, quarta propor-
tionalis ſumatur pro latere H K. Nam rectangulum ſub extremis* h 12.
H I, H K, æquale erit rectangulo ſub mediis A B, B C. ſexti.

Hac eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam i 16.
rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo ſexti.

*Quoniam vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum
contentum ſub duabus rectis Mediis potentia tantum commenſu-
rabilibus eſſe vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propoſ.
18. quanam ratione inueniendæ ſint duæ Mediæ potentia tantum
commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant. Propoſ. vero 29.
duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpati-
um Medium contineant.*

Itaque habemus ex his k rectangulum contentum ſub duabus k 20.
Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale; l decimi.
Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commenſurabili- l 22.
bus contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellarique Mediũ, decimi.

& rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat, a rectangulum comprehenſum ſub duabus Mediis longitudine commenſurabilibus eſſe Medium; b Rectangulum autem ſub duabus Mediis potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel medium.

a 25. decimi.
b 26. decimi.

Quod ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Mediis longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddã genus conſtituere, nempe æquale eſſe rectangulo quod cõtinetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

Sit enim rectangulum A C, comprehenſum ſub duabus Mediis A B, B C longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico A C, neque Rationale eſſe, neque Medium, &c. Conſtructis enim eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas G H, K M, Rationales eſſe, & ipſi F G, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ A B, B C, ponuntur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt ne & earum quadrata A D C E, atque adeo ipſis æqualia rectangula c F H L M, incommenſurabilia. c Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta G H, ad rectam K M, d Igitur rectæ G H, K M, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare G H, K M, oſtenſa Rationales ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles; e Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, K M Irrationale eſt, quod Medium appellatur. & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. f Poteſt autẽ rectangulum ſub ipſis G H, K M, recta H K; (Nam vt prius oſtendemus, tres G H, H K, K M, eſſe proportionales) Igitur H K, Irrationalis eſt, & Media. Quare I K, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet, g faceret ipſum ad Rationalem H I, applicatum latitudinem H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt H K, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque I K, medium eſt. ſi enim eſſet Medium, h faceret ipſum applicatum ad Rationalem H I, latitudinem H K, Rationalem, & ipſi H I. longitudine incommenſurabilem. quod eſt abſurdum, oſtenſa eſt enim H K, Irrationalis, & Media. Itaq; cum I K, neque Rationale ſit, neque Medium; neceſſario neque A C, illi æquale, Rationale erit neque Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi I K quod ſub Rationali, & Media continetur, cum H I. Rationalis ſit, & H K, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ poteſt ſpatium ſub duabus Mediis longitudine & potẽtia incommenſurabilibus, quales ponuntur A B, B C, comprehenſum, poſſe quoque rectãgulum ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod eſt propoſitum.

c 1. ſex.
d 10. decimi.
e 22. decimi.
f 17. ſexti.
g 21. decimi.
h 23. decimi.

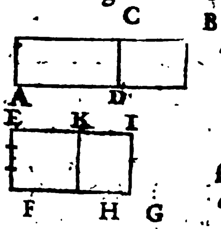
xxvj.
xxij.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

Medium non ſuperat Medium Rationali.

Supe-

Superet Medium AB, Medium AC, rectangulo DB, Dico DB, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, DB, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea EF, *a* ad ipſam applicetur rectangulum FG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt ſit reliquum HI, Rationale DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, ſunt applicata, *b* erunt rectæ FG, FH, Rationales & ipſi EF, incommenſurabiles longitudine. Rurſus quia Rationale HI, applicatum eſt ad Rationalem HK, (*c* eſt enim recta HK, Rationali EF, æqualis) *d* erit recta HG, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine ſint commenſurabiles; & EF, ipſi FH, longitudine incommenſurabilis, vt eſt oſtenſum; *e* erit & HG, eidem FH, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum ſub FH, HG, ex tertio lemmate propoſ. 19. huius lib. *f* igitur quadratum ex FH, incommenſurabile eſt rectangulo ſub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commenſurabile eſt quadratum ex HG, (quod ſint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, deſcripta) *g* atque adeo & duo quadrata ex FH, HG ſimul, quadrato ex FH, commenſurabilia ſunt. Et rectangulo ſub FH HG, commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub FH, HG, (quia hoc illius eſt duplum) Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 4. huius lib. oſtendimus, & duo quadrata ex FH HG ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub FH HG, bis *h* Quare & compoſitum ex quadratis rectarum FH HG, & ex rectangulo bis ſub FH HG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH HG; *i* At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis ſub FH HG, æquale eſt quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH HG: Eſt autem compoſitum hoc Rationale, ex lemmate 4. propoſ. 19 huius li. quod oſtenſum ſit commenſurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic compoſito, quod Rationale eſt incommenſurabile ſit quadratum ex FG, *k* erit quadratum ex FG, Irrationale, *l* ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod eſt abſurdum, oſtenſa enim eſt FG, Rationalis longitudine ipſi EF, incommenſurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, ſuperat Medium AC, Rationale eſt. Quam ob rem Medium non ſuperat Medium Rationali. Quod erat oſtendendum.



a 45. primi.
b 23. decimi.
c 34. primi.
d 21. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.
h 17. decimi.
i 4. ſecundi.
k 10. defin.
l 11. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

Ex dictis & hoc demonſtrabimus.

Rationale ſuperat Rationale-Rationali.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC, ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale: Quoniam enim AB, AC Ra-

C B



A D

a 9 defin. *tionalia ſunt; a erunt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſita; b atq; adeo &*
b 12. decimi. *inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum AB compoſitum ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC, erit quoque idem AB, reliquo DB commenſurabile, ex corol propoſ. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale Igitur & DB ex lemmate 4. propoſ. lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.*

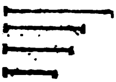
xxvij. o.

THEOR. 4. PROPOS. 28.

Meidas inueniri potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propoſ. 21. huius lib. duæ Rationales A, *B*, potentia tantum commenſurabiles, *c* inter quas
c 13. sexti. media proportionalis ſumatur *C*, *d* fiatque vt A, ad B, ita *C*. ad *D*. *Dico C, D*, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ
d 12. ſexti. Rationale comprehendant. Quoniam enim A, *B*, Rationales

A
C
B
D



ponuntur potentia tantum commenſurabiles;
e 22. decimi. *e* erit rectangulum ſub ipſis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur, atque adeo *f* cum ipſum poſſit recta C, erit *C*, Media. Et
f 17. ſexti. quoniam eſt vt A, ad *B*. ita *C*. ad *D*. ſintq; A, B, potentia tantum commenſurabiles; erunt quoq; *C*, D, ſolum commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libr. oſtendimus. *g*. *Eſt* ergo & D, Mediæ *C*, commenſurabilis Media. Quare
g 24. decimi. inuentæ ſunt Mediæ *C*. *D*, potentia tantum commenſurabiles *Dico* iam ipſas continere Rationale. Quoniam enim eſt vt A. ad *B*. ita *C*. ad *D*, & permutando vt A. ad C ita *B*. ad *D*. Vt autem A. ad *C*. ita eſt C. ad *B*; erit quoq; vt *C*. ad B. ita *B*. ad *D* ideoq; *B*. media proportionalis inter *C*. & *D*. *h* poterit rectangulum ſub ipſis *C*. *D*.
h 17. ſexti. comprehenſum. *Eſt* autem quadratum ex *B*. linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C. *D*. Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C. *D*. potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

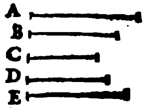
xxviij. o.

PROBL. 5. PROPOS. 29.

Media inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

Expo-

Exponantur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demō-ſtrauimus, tres rationales A, B, C, potentia tantūm commenſurabiles, *a* & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. *b* Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E. Medias eſſe potentia tātum commenſurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim AB, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: erit rectangulum ſub A, B, atque adeo & quadratum ex D, *c* quod illi æquale eſt, *d* Irrationabile, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E, ſunt autem B, C, ra Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erunt quoque D, E, potentia ſolum commēſurabiles, vt in ſcholio propoſ 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D. Media ſit, *e* erit & E, illi potentia ſolum commēſurabilis, Media, Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Medium. Quoniam enim eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A: erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. *f* Rectangulum igitur ſub D E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autem quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. *g* Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Mediū eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.



a 13. *ſex.* b 12. *ſexti.* c 17. *ſexti.* d 21. *decimi.* e 24. *decimi.* f 16. *ſexti.* g 22. *decimi.*

SCHOLIVM.

In iis quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

Duos numeros planos ſimiles inuenire.

Sumantur quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem ſe mutuo A, & B, faciant E; Item C & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E. & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

Quoniam autem in lib. 9, h *oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem, Imparem vero, ſi impar multiplicet imparem, perſpicuum eſt, quonā modo inueniri poſſint plani ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horū vero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.*

h 28. & 29. *noni.*

LEMMA I.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

Inueniantur per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles A B, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar. a 24. & 26. noni *a Et quoniam, ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto B D, ex A B, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus A D, par. Quo*

A . . . . . E . . . . D . . . . B
C . . . .

diuiſo bifariam in E; Dico numerum factum ex A B, in B D, b 1. noni *b qui quidem quadratus eſt, compoſitum cum quadrato numeri E D, facere quadratum. Quoniam enim numerus A D, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus D B; erit ex 6. theorematis eorum, quæ ex propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex A B in B D, vnà cum quadrato numeri D E, æqualis quadrato numeri E B. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D, & quadratus numeri D E, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex B E, gignitur. quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, quando A B, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum exceſſus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus ſit.

Quod ſi numeri ſumantur A B, & C, non ſimiles, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum B E, E D. quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex A B, in B D, non eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, c numeri A B, B D, hoc eſt, A B, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

SCHOLIVM II.

Itaq; ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles quorum vterq; par, vel impar ſit, nempe A B, & C, & c 2. noni *reliqua perſequemur, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus eſt.*

A . . . . . E . . . . D . . . . B
C . . . .

Si vero inueniendi ſunt duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani AC, & C, non ſimiles, quorum vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex BE, æqualem eſſe quadrato

A . . . E . . . D . . . . . . B
C . . . .

ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare exceſſus quadratorum ex BE. ED, eſt numerus factus ex AB, in BD, qui cum non ſit quadratus, (Si enim eſſet quadratus, eſſent AB, BD, plani ſimiles quod non ponitur) conſtat propoſitum.

Hoc poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36 diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA II.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

Sint duo numeri plani ſimiles AB, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatque eadem conſtructio, ita

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B
C . . . .

vt rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorum AB, DB, inter ſe, vna cum quadrato ex DE, æqualis ſit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit, compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipſius maius latere BF. Erit

ergo latus ipſius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur: Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam B F, minus vero quam B E.)

A..H..I. E .F .G...D ....B
C........

Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cum eidem quadrato ex B E ſit oſtenſus ex præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo ſcilicet, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E: Ideoque & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe fit, æquale eſt numero B E. Sed neque maius. Sit enim ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam B E, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe fit, (cum hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erat reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti in quadratis, quorum alter fit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neque æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

Sit iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cũ quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F.

A..H..I.F.G...D........B
C........

Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablata vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus, qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F. Sed eidem quadrato ex B F, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis eſt ei, qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex D F, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex A B, in B D, æqualis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eundem B D, producant æquales numeros; a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipſi A B æqualis pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex B F, æqualis. a 18. ſep.

Sit tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod ſit B G, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ſit quadrato ex B G. Sumatur autem ipſius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus eſt, & ablatus A I, ablati E G; erit rurſus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea I D, in G, diuiditur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus, qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis quadrato ex B G. Ponitur autem eidem quadrato ex B G, æqualis, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis eſt ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor eſt, remanebit qui ex

I B, in B D, maior eo, qui ex A B, in BD, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neq; maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Quod eſt propoſitum.

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B
C . . . .

SCHOLIVM III.

Ex hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quã quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

Idem obtinemus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

xxix.
PROBL. 6. PROPOS. 30.

xvij.
Inuenire duas Rationales potentia tãtum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

Exponatur linea Rationalis A B, & inueniantur ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum exceſſus D E, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum, ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodeturque AF, in ſemicirculo A B F, circa diametrum AB, deſcripto: ac denique connectatur recta F B. *a* Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo: *b* erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB: hoc eſt, recta A B, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia eſt quadratum ex A B, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum D E, *c* erunt quadrata ex A B, A F, commenſurabilia; atque adeo cum quadratum ex A B, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali A B: deſcriptum, erit & quadratum ex A F, Rationale, proptereaque & recta AF, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt A B, A F, atque adeo commenſurabiles ſaltem potentia.



A B
C . . . . E . . . . . D

a 31. tertij.
b 47. primi.
c 6. dec.

Quia

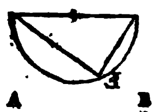
Quia vero quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; alias & DE, quadratus eſſet, *a* vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quod non ponitur) *b* erunt rectæ AB, AF, longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur AB, AF, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles. a 24. oct. b 9. decimi.

Iam vero, quoniam eſt vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB (ſicut enim CD ſuperat DE, quadrato CE, ita etiam quadratum ex AB ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB.) *c* Quare rectæ AB FB, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit, quam minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat. c 9. dec.

PROBL. 7. PROPOS 31. XXX. XVIII.

Inuenire duas Rationes potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

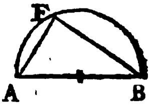
Exponatur Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propoſ. 29 huius lib, duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compoſitus CD, non ſit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, ſecetur in duos numeros nō quadratos CE, ED: Verum nis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipſorum CE. ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum,



C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C, ... E . . , D

alias ſecundum priorem modum, eſſet totus CD, etiam quadratus: iuxta poſteriorem vero, quilibet ipſorum CE, ED, quadratus quoque, *d* vt in Arithmeticis oſtenſum eſt, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propoſ 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodetur que AF, in ſemicirculo AFB, circa AB, deſcripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Eadem enim hic eſt demonſtratio, quæ in præcedenti propoſ. d 24. oct.

propoſ. Quoniam vero rurſus, vt prius, eſt per cõuerſionem rationis, vt C D, ad C E, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex F B; Non habet autem C D, ad CE, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoq; quadratum ex AB, ad quadratũ ex F B, proportionem,

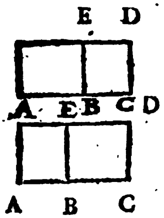


C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C...... E... D

a 9. dec. Quam quadratus numerus ad numerum Quadratum. *a* Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſſit quam minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine incommenſurabilis Quod erat faciendum.

LEMMA 4.

Si ſint duæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



Sint duæ rectæ inæquales A B, B C, *in rectũ conſtitutæ quarum* A B, *maior ſit.* Dico *eſſe, vt* A B, *ad* B C, *ita rectangulum ſub* A B, B C, *ad quadratum ex* BC. *Deſcribatur enim ex* B C, *quadratum* B D, *compleaturq; rectangulum* A D; *eritq; rectangulum* A E, *ſub* A B, B C, *contentum; quod* B E, *ipſi* B C, *ſit æqualis;* b1. ſexti. b *perſpicuum autem eſt, eſſe vt* A B, *ad* B C, *ita* A E, *ad* B D.

Eodem modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua A B, *minor eſt, quam* B C,

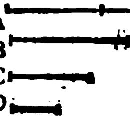
xxxj.
xxiv.
xxv.

PROBL. 8. PROPOS 32.

Inuenire duas medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale cõtineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

c 30. decimi. *c* Repertæ ſint duæ Rationales, A, B, potentia tantum commenſurabiles: ita vt A, maior plus poſſit quam B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B: & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolum commenſurabi-

les

les, *a* erit rectangulum ſub A B, Irrationale, & A  a 22. decimi.
recta C, ipſum potens; linea Media. Et quia eſt B
vt A, ad B, ita C, ad D; ſunt autem A, & B, po- C
tentia tantum commenſurabiles; erunt quo- D
que C, & D, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10 huius libri oſtendimus. *b* Quare D, Mediæ C, commenſurabilis, Media quoque eſt. Inuentæ ergo ſunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim ſit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; ſit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; *c* Ac propterea rectangulum ſub C &, D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale ſit; erit & rectangulum ſub C, D, illi æquale Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles, Rationale. Quoniam vero eſt vt A, ad B, ita C, ad D: poteſt autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, ex conſtructione; *d* poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Inuenimus igitur duas Medeas, C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus poſſit quam minor D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.

b 24. decimi. c 17. sexti. d 15. decimi.

Quod ſi repertę ſint A, B, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam B, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, oſtendemus eodem modo, inuentas eſſe duas Medias C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior, C, plus poſſit quam minor D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis.

SCHOLIVM.

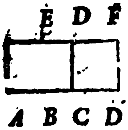
Alij hoc problema demonſtrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem ſine ipſo oſtendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonſtratione hanc noſtram contulerint. Immo rectas C, D, medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic oſtendimus, ac in propoſ. 28. huius libri.

LEMMA.

Si ſint tres lineæ rectæ; erit vt prima ad tertium, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentũ, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur.

Sint tres rectæ A B, B C, C D, *in rectum conſtitutæ, Dico eſſe vt* A B, *ad* C D, *ita rectangulum ſub* A B, B C, *ad rectangu-*

lum



lum ſub B C, C D. Deſcribatur enim ex B C, quadratum B C D E, perficiaturq; rectangulum A F; Eritq; A E, contentum ſub A B, B C; & C F, ſub B C, C D; quod B E, C D, ipſi B C, æquales ſint. a Perſpicuum autem eſt eſſe A B, ad C D, vt A E, ad C F. Quod erat propoſitum.

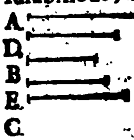
a 1. ſexti.

xxxij. xxvj.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

Inuenire duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit quã minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Sint inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commenſurabilibus, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolum commenſurabilis, per ea, quę in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus.) c Et ipſarum A, B, ſumatur media proportionalis D; d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C; e Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex D, f & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulum ſub D, E, quod proportionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolum commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus. g Quia vero D, potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Irrationalis eſt, & Media; h erit quoque E, ipſi oſtenſa commenſurabilis Media. Inuentæ ergo ſunt duæ Mediæ D, E, potentia ſolum commenſurabiles. Et quia oſtenſum eſt rectangulo ſub B, C, i quod Medium eſt, (quod B, C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles) æquale eſſe rectangulum ſub D, E. erit rectangulum ſub D, E, Medium. Denique oſtendimus eſſe vt A, ad C, ita D, ad E; poteſt autem A, plus quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ex conſtructione, k poterit &



b 30. decimi. c 13. ſexti. d 12. ſexti. e 17. ſexti. f 16. ſexti. g 22. decimi. h 24. decimi. i 22. decimi. k 15. decimi.

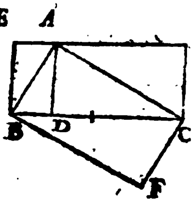
etiam

iam D, plus quam E. quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.

Quod ſi repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, vt prius, demonſtrabimus ſimiliter, inuentas eſſe duas Medias D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis Id quod facile apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

LEMMA I.

Sit triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum ſub C B, B D, æquale eſſe quadrato ex A B: contentum autem ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C, & contentum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum deniq; ſub B C, A D, æquale contento ſub A B. A C.



Quoniam ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis eſt inter C D, B D; a erit rectangulum ſub C B, B D, quadrato ex A B, æquale. a 17. ſexti.

Eadem ratione erit rectangulum ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C media proportionalis eſt inter B C, C D.

Rurſus quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectangulum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

POSTREMO, b *quia triangula A B C, A B D, ſimilia ſunt, erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* c *Quare rectangulum ſub B C, A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, A C. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum ſub B C, A D: Item rectangulum A F. ſub A B A C, contentum.* d *Quoniã igitur rectangulum C E, duplũ eſt trianguli A B C, n. c non & r. ctangulum* b 8 ſexti. c 16. ſexti. d 41 primi.

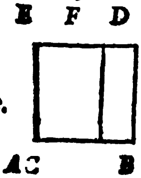
gulum

gulum A F, *eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula* C E, A F. *quod eſt propoſitum.*

LEMMA II.

Si recta linea ſecetur in duas partes inæquales; erit vt maior pars ad minorem; ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

Secetur recta A B, *non bifariam in* C, *ſitq́ maior pars* A C, *Dico eſſe vt* A C, *ad* C B, *ita rectangulum ſub* A B, A C, *ad rectangulum ſub* A B, C B. *Deſcribatur enim ipſius* A B, *quadratum* A B, D E, *ducaturque* C F, *ipſi* A E, *parallela; eritque* A F, *contentum ſub* A B, A C *&* C D, *contentum ſub* A B, C B; *quod* A E, C F, *ipſi* A B, *æquales ſint.* a *Quoniam igitur eſt vt* A C, *ad* C B, *ita* A F, *ad* C D; *conſtat propoſitum.*



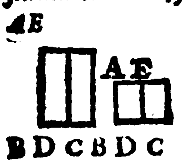
a 1. ſext.

Eadem ratione erit, vt minor pars B C, *ad maiorem* C A, *ita* B F, *contentum ſub* A B, B C, *tota, & minore parte, ad* C E, *contentum ſub* A B, C A, *tota, & maiore parte.*

LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectãguli, quod ſub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

Sint duæ rectæ inæquales A B, B C, *angulum rectum conſtituentes* A B C, *ſeceturq́ minor* B C, *bifariam in* D, *Dico rectangulum ſub* A B, B C, *duplum eſſe rectanguli ſub* AB, BD. *Compleatur enim rectangulum* A C, *ſub* A B, B C; *ducaturq́* D E, *ipſi* AB, *parallela, eritq́* BE, *contentum ſub* AB, *&* B D, *dimidia minoris.* b *Quoniam igitur* A C, *ipſius* B E, *duplum eſt, quod & baſis* B C, *dupla ſit baſis* B D, *conſtat propoſitum.*



b 1. ſexti

EODEM *modo, ſi* B C, *ſecta bifariam, ſit maior, erit quod*

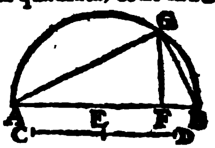
ſub

ſub A B, B C, continetur, duplum eius, quod continetur ſub A B, minore, & B D, dimidia maioris, vt ex ſecunda figura apparet.

PROBL. 10 PROPOS. 34. xxxiiij. xxvij.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quę faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale, Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium.

a Reperiantur duæ Rationales A B, C D, potentia ſolum commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſſit quam minor C D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; ſeceturque C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C E, hoc eſt quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud quoq; ſub A F, F B, continetur. Poſtremo deſcripto ſemicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad A B, perpendicularis, connectanturque rectæ A G, G B. Quoniam igitur A B, plus poteſt, quam C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, applicatumque eſt ad A B, rectangulum ſub A F, F B, æquale quartæ parti quadrati ex C D, deficiens figura quadrata; *b* erit A F, ipſi F B, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt A F, ad F B, ita per lemma 1. propoſitionis antecedentis, rectangulum ſub A B, A F, ad rectangulum ſub A B, F B; Rectangulum vero ſub A B, A F, quadrato ex A G, & rectangulum ſub A B, F B, quadrato ex G B, eſt æquale, per lemma 1. eiuſdem antecedentis propoſitionis *c*; quod angulus A G B, rectus ſit in ſemicirculo A G B. Igitur quoque erit vt A F, ad F B, ita quadratum ex A G, ad quadratum ex G B, ac propterea cum A F, F B, longitudine ſint incommenſurabiles; *d* erunt quadrata ex A G, G B, incommenſurabilia. *e* Igitur rectæ A G, G B, potentia incommenſurabiles ſunt. Et quia quadratum ex Rationali A B, Rationale eſt, *f* æqualeque quadratis ex A G, G B; erit etiam compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Rationale. Ruſus, quia ex 1. lemmate propoſitionis præcedentis, rectangulum ſub A F, F B, quod quadrato ex C E, æquale eſt factum, *g* æquale eſt quadrato ex F G, (propterea quod angulus A G B, rectus eſt & F G, ad A B, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, C E, æqualia; ac proinde & rectæ F G, C E, æquales. Quare C D, dupla exiſtens ipſius C E, dupla etiam erit ipſius F G. Igitur per lemma 3. antecedentis propoſitionis, rectangulum ſub A B,



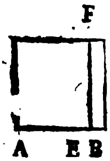
a 31. *decimi.* *b* 19. *decimi.* *c* 31. *tertii.* *d* 10. *decimi.* *e* 4. *def.* *f* 47. *primi.* *g* 17. *ſexti.*

C D, duplum erit rectanguli ſub A B, F G. (cum F G, dimidia ſit
a 22. minoris C D.) a Sed rectangulum ſub AB, CD, Rationalibus po-
decimi. tentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt. Igi-
tur & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile; cum ſit eius
dimidium, Medium eſt, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Atqui re-
ctangulo ſub A B, F G, per 1. lemma propoſitionis præcedẽtis æqua-
le eſt rectangulum ſub A G, G B. Contentum igitur ſub A G, G B,
Medium quoq; eſt: Oſtenſum autem eſt compoſitum ex earum
quadratis, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ A G, G B, po-
tentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex
ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis con-
tentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

*Demonſtratur hoc loco in ſcholio quodam antiquo, fieri poſſe, vt
duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac fere
ratione.*

*Exponatur Rationalis linea A B, & duo numeri C, D, quorum
C, maior ſit, non habentes proportionem, quam quadratus ad qua-
dratum; fiatq; vt C ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum
ex A E; & tandem deſcripto quadrato ex A B, educa-
tur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur eſt,
vt C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex
A E: Non habet autem C, ad D, proportionem, quam*
b 9. decimi. *quadratus ad quadratum; b erunt latera A B, A E,
dictorum quadratorum proportionem nõ habentium,
quam quadratus ad quadratum, longitudine incom-
menſurabilia; Ac propterea cum A B, tota longitudi-*



C,6. D,4.

ne ſit incommenſurabilis parti A E, erit eadem AB, & reliqua EB,
c 1. ſext. *longitudine incommenſurabilis, ex coroll. propoſ. 17. huius lib. c Vt
autem A B, ad AF, ita quadratum ex A B, ad AF. Igitur cum AB,*
d 10. decimi. *AB, incommenſurabiles ſint longitudine, d erunt quadratum ex
AB, & rectangulum A F, incommenſurabilia. Quare quadrato
ex AB, exiſtente Rationali, quod & AB Rationalis ponatur; erit
AE, dicto quadrato incommenſurabile, Irrationales. Eodemq; ar-
gumento oſtendemus B F, Irrationale eſſe. Quia vero AF, BF, com-
ponunt quadratum Rationale ex A B; perſpicuum eſt, ex duobus
Irrationalibus confici poſſe Rationale. Quod eſt propoſitum.*

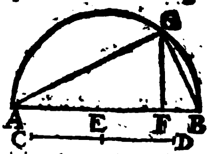
*At vero ſi AF, FB, Rationalia ſint, oſtendemus & totum AFB,
ex ipſis compoſitum Rationale eſſe. Cum enim vtrumq; AF FB, Ra-*
e 16. decimi. *tionale ſit: erunt ipſa inter ſe commenſurabilia. e Igitur & totum
AFB, ex ipſis compoſitum vtriq; totum commenſurabile erit. Qua-*
f 9. deff. *re AFB, totum commenſurabile vtriq; Rationali AF, FB, f Ratio-
nale quoq; eſt, Quod eſt propoſitum.*

PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale. xxxiv xxxviij

a Reperiantur duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus poſſit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propoſ. Oſtendemus igitur ſimiliter, vt in propoſ. antecedenti, rectas A G, G B, potentia eſſe incommenſurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, *b* æquale exiſtens quadratis rectarum AG, GB, Mediũ eſt, erit quoque compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rurſus vt in antecedenti propoſitione, oſtendemus rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG; atque adeo illud eſſe huic commẽſurabile. Quare cum rectangulum ſub AB, CD, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub A B, F G, illi incommenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Igitur & rectangulum ſub A G, GB, Rationale eſt. Oſtẽſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium. Igitur duæ rectæ A G, G B, quæ oſtenſæ ſunt potentiã incõmenſurabiles, faciunt cõpoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulũ ſub eiſdem cõprehenſum, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. decimi

b 47. primi

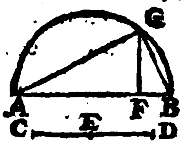
PROBL. 12. PROPOS. 36.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. xxxv xxxix

c Reperiantur duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus poſſit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas A G, G B, potentia incommenſurabiles eſſe

c 33. decimi

a 47. pri. les eſſe. Et quia quadratum ex Media A B, Medium eſt, a & quadrati rectarum A G, G B, æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus;



vt in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub A B C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G; atque adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum ex conſtructione, rectangulum ſub A B, C D, Medium ſit; erit quoque rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, quod illi per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi C D: Eſt autem eidem C D, ipſa C E, longitudine commenſurabilis; quod illa huius ſit dupla; b 31. decimi. b erunt A B, C E, longitudine incommenſurabiles. Sed vt A B, ad C E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, C E, hoc eſt, ad rectangulum ſub A B, F G; hoc eſt, ſub A G, G B. (ſunt enim rectangulum ſub A B, F G, & ſub A G, G B, per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia.) c 10. decimi. c Igitur quadratum ex A B, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A G, G B. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ A G. G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Ex hoc vero problemate facile illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24 huius lib. nos demonſtraturos recepimus. nimirum.

Inuenire duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

Quoniam oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, quam rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommenſurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia eſſent commenſurabiles, eſſent & earum quadrata hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum ſub AG, GB, commenſurabilia, quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur AB, potens compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB. & alia recta potens rectangulum ſub AG, GB; id eſt, media proportionalis inter AG, GB, inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

Prin-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compoſitionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj. xxx.

Si duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur duæ Rationales A B, B C, potentia ſolum commenſurabiles, inuentæ per 2. lemma propoſ. 21. huius lib. Dico totam AC Irrationalem eſſe. Quoniam enim A B, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi B C: & vt A B, ad BC, ita eſt rectangulum ſub A B, BC, ad quadratum ex B C, per lemma propoſ. 31. huius lib.



a erit rectangulum ſub AB, BC, quadrato ex BC, incõmenſuabile. Sed rectangulo ſub AB BC, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur, & quadrato ex BC, commenſurabile eſt quadratum rectæ A B; (omnia enim ſunt Rationalia) *b* atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, commenſurabile eſt. Igitur per ea, in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub A B, BC, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A B, BC. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub AB, BC, & ex compoſito quadratorum rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratum ex tota AC, (*c* Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB, B C, vna cum rectangulo ſub A B, B C, bis) compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, *d* incõmmenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, BC, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex BC, Rationali Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex B C, incommenſurabile, *e* Irrationale eſt; atque adeo & recta ipſa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia ſolum commenſurabilibus cõponitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.

a 10. decimi.
b 16. decimi.
c 4. ſecundi.
d 17. decimi.
e 10. defin.

SCHOLIVM.

Itaq; ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, f Irrationalis eſt, quæ media vocatur. At vero compoſita ex ipſis, g Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.

f 22. decimi.
g 37. decimi.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

xxvij. xxxj. **Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis mediis prima.**

a 28. decimi. Componantur duæ Mediæ *a* ſuperius inuentæ AB, BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quia enim AB, eſt ad BC, vt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propoſ. 31. huius lib. eſt oſtenſum; ſunt autem A B, B C, longitudine incommenſurabiles;

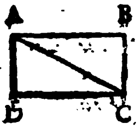


b 10. decimi. *b* erunt rectangulum ſub A B, B C, & quadratum ex BC, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B, BC, commenſurabile eſt, quod ſub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, B C. (Nam cum AB, BC, potentia ſint commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia, *c* atq; adeo & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex BC, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub AB, BC, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex A C, *d* quod huic compoſito æquale eſt, *e* incommenſurabile quoq; eſt rectangulo ſub AB BC, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub AB, BC, commenſurabile rectangulum ſemel ſub AB, BC, cum hoc ſit illius dimidium. *f* Igitur quadratum ex A C, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BC: Ponitur autem rectangulum ſub AB BC, Rationale. *g* Irrationale ergo eſt quadratum ex A C, *h* & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 16. decimi.
d 4. ſecundi.
e 17. decimi.
f 13. decimi.
g 10. defin.
h 11. defin.

LEMMA.

Quod ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt.



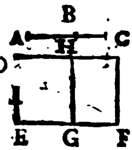
i 21. decimi. *Contineatur rectangulum A B C D, ſub Rationali AB, & Irrationali B C. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale, i faciet ipſum ad Rationalem A B, applicatum Latitudinem B C, Rationalem. Quod eſt abſurdũ. ponitur*

nitur enim BC, Irrationalis. Non ergo AC, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quo eſt propoſitum.

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur ex binis Mediis ſecunda.

Componantur duæ Mediæ *a* ſuperius inuentæ AB, BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, *a 29. decimi,*
b ad quam explicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, re- *b 45. primi.*
ctangulum DF, *c* æquale eſt duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub AB, BC, continetur. Quoniam vero ex *c 4. ſecundi.*
hypotheſi, rectangulum ſub AB, BC, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile, hoc eſt, HF, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; *d* erit & compoſitum ex ipſis nimirum rectangulum DG, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed *d 10. decimi,*



vtrumque quadratorum ex Mediis AB, BC, Medium eſt. Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; (*e* eſt enim GH, *e 34.*
Rationali DE, æqualis) *f* erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia AB, *primi.* *f 23.*
BC, longitudine incommenſurabiles ſunt; & eſt vt AB, ad BC, ita *decimi,*
quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, BC, ita quadratum ex AB. ad rectangulum AB, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommenſurabile rectangulo ſub AB, BC, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex AB, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC; & rectãgulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub AB, BC, cum hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & cõpoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, hoc eſt, rectangulum DG, incommenſurabile rectãgulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, rectangulo HF, *g* Cum er- *g 1. ſexti,*
go ſit vt DH, ad GF, ita EG, ad GF; *h* erit EG, ipſi GF, longitudine *h 10.*
incõmenſurabilis: Oſtenſum aũt iam fuit EG, GF, eſſe Rationales. *decimi,*
Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantum commẽſurabiles,

a ac propterea & tota E F, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum ſub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex A C, ipſi D E, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda, ſeu vt aliis placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potẽtia tantum commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 37. decimi.

SCHOLIVM.

Vocauit Euclides in præcedenti propoſitione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus mediis potentia tantum commenſurabilibus, quæ Rationale cõtineant, ex binis Mediis primam. Hic vero lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantum commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis ſecundam: quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.

LEMMA.

Si recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat.

Secetur recta AD, in B, non bifariam, ſitq́; maior pars AB; in qua ſumatur BC, minori BD, æqualis, vt ſit AC, exceſſus, quo AB, ſuperat BD, hoc eſt, BC, ipſi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC.



Quoniam enim quadrata ex AB, BC, b *æqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC, eſtq́; BC, ipſi BD, æqualis: erunt quoque quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis ſub AB, BD, vna cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora ſunt, quam rectangulum bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC: quod eſt propoſitum.*

b 7. ſecundi.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiij

THEOR. 28. PROPOS. 40.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur,

tinetur, Medium; tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

Componantur duæ rectæ *a* ſuperius inuentæ A B, B C, potentia incommenſurabiles facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium. Dico totam A C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim rectangulum ſub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis ſub A B BC, illi commenſurabile, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. *b* Incommenſurabile ergo eſt rectangulum bis A B, BC, compoſito ex quadratis rectarum A B, B C. *c* Igitur & rectangulum bis ſub A B, B C, vna cum qudratis ex AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compoſitum ponatur Rationale: *d* erit quadratum ex A C, illi incommenſurabile, Irrationale. *e* Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autem Maior, quia *f* cum poſſit duo quadrata ex AD, BC; & rectangulum bis ſub AB, BC; compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, B C. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB, B C, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub AB, BC, Medium: recte vocabitur A C, Maior, ſiquidem à Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. *Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c.* Quod erat oſtendendum.

a 10. decimi.

b 10. defin.

c 17. decimi.

d 10. defin.

e 11. defin.

f 4. ſecundi.



THEOR. 29. PROPOS. 41.

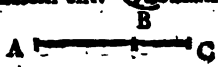
xl.
xxxiv.

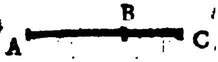
Si duæ rectæ lineæ potentia incõmenſurabiles componantur, quę faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

Componantur duæ rectæ *g* ſuperius inuentæ A B, B C, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium, rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod vero continetur bis ſub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod ſub A B, BC, ſemel continetur, Rationale ponatur, *h* erit compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, in commen-

g 35. decimi.

h 10. defin.





a 17. decimi. commenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC. *a* Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, BC, vt diximus, ſit Rationale; *b* erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; *c* Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum ſcilicet bis contentum ſub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 10. defin.

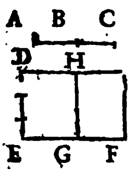
c 11. defin.

xlj.
xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

Si duæ rectæ lineæ potentia commenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. decimi. Componantur duæ rectæ *d* ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum, Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, *e* ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, *f* æquale eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis ſub AB, BC. Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulum DG, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub AB, BC, nempe ipſum HF, (cum illi ſit commenſurabile.) Medium ponitur, *g* facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine Incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe



e 45. primi.

f 4. ſecundi.

g 23 decimi.

quod

quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; *a* erunt & DG, a 13. *deci-*
HF, incommenſurabilia. Quare *b* cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad *cimi.*
CF; *c* erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles; Atqui EG, b 1. *ſexti.*
GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt po- c 10.
tentia ſolum commenſurabiles; *d* Ac propterea tota EF, ex ipſis *decimi.*
compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali d 37.
DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale *decimi.*
eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; *e* ideoq; e 11.
& recta ipſa AC Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, *defin.*
nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſimul.



Secetur recta AB, inæqualiter in C, & rurſus inæqualiter in D, ſintq; priores partes AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiora eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diuiſa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, F. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, f æquale eſt quadrato ex EB; f 5. *ſe-*
Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, *cundi.*
æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius ſit quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB, minus erit rectangulo bis ſub AD, DB.
Quoniam vero quadratum ex AB, g æquale eſt tam rectangulo g 4. *ſe-*
bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, quam rectangulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB, erit rectangulum

gulum bis ſub A C, C B, vna cum quadratis ex A C, C B, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, vna cum quadratis ex A D, D B.



Quare cum rectangulum bis ſub A C, C B, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub A D, D B, erunt reliqua quadrata ex A C, C B, maiora reliquis quadratis ex A B, D B. Quod eſt propoſitum.

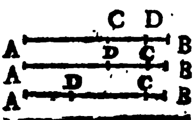
Sed cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes A C, C B, magis inæquales ponuntur, quam partes A D, D B; erit A D, (quæ minor eſt poſteriorum) maior quam C B; (quæ priorum minor eſt) ac proinde cum A E, E B, æquales ſint, erit reliqua E C, maior quam reliqua D E. Itaq; quia rectangulum ſub A C, C B, vna cum quadrato ex E C, a æquale eſt quadrato ex E B: Item a 5 ſecundi. *rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex D E, æquale eſt quadrato ex A E, hoc eſt, eidem quadrato ex E B; erit rectangulum ſub A B, C B, vna cum quadrato ex E C, æquale rectangulo ſub A D, D B, vna cum quadrato ex D E. Igitur vt prius, demonſtrabimus quadrata ex A C, C B, maiora eſſe quadratis ex A D, D B. Quod eſt propoſitum.*

xxxxij.
xxxvj.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

Quæ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, ſint Rationales potentia tantum commenſurabilia, vt vult propoſ. 37. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina ad D. Conſtat ergo A B, in C, non diuidi bifariam. Nam ſi bifariam diuideretur, eſſent A C, C B, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam ſecabitur A B, cum & A D, D B, Rationales ſint potentia tantum commenſurabiles. Secatur ergo A B, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes A C, C B, vel minus inæquales ſunt, quam partes A D, D B, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens quadrata ex A C, C B, vel minora



ſunt

ſunt quadratis ex A D, D B, vel maiora. (Neque enim partes A D, D B, vbicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraq; vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur A B. ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima. quod non ponitur.) Quia vero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis ſub A D, D B, a quod tam illa, quam hæc æqualia ſint quadrato ex A B; fit vt qui exceſſus fuerit ablati cõpoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub A C, C B, & reliqui rectanguli bis ſub A D, D B Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. (Cum enim rectæ A C, C B, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus; eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27 huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. b Quoniam vero rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, erit & quod bis ſub A C, C B, illi comenſurabile, ex coroll. propo. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. c Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

a 4. ſecundi.

b 23. decimi.

c 27. decimi.

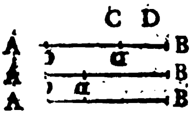
THEOR. 32. PROPOS 44. xliij. xxxvij.

Quæ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis Mediis prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſ. 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ

ſcilicet

ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei quod continetur ſemel ſub AC, CB, commenſurabile, Rationale. Eodemq; modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cũ Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus: perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earũ quadrata Media quoq; & commenſurabilia. a Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarũ AD, DB. b Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quamobrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.



a 16. decimi.

b 27. decimi.

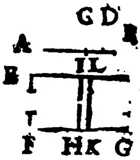
xliv. xxxviij.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

Quæ ex binis Mediis ſecunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

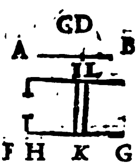
Sit ex binis Mediis ſecunda AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex AC, CB, maiora

eſſe quadratis ex A D, D B, vel minora. Exponatur rationalis a 45. primi
E F, a ad quam applicetur rectangulum E G, æquale quadrato ex mi.
A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis ſub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, b æquale eſt quadratis ex A C, C B, b 4. ſecundi.
& rectangulo bis ſub A C, C B. Eodem modo ſi ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquale, erit reliquum L G, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, comprehenſo. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia ſunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectæ F H, F K, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis



ſub A C, C B; erit & E H, maius quam I G; ac propterea E H, maius quam dimidium ipſius E G; ideoque & recta F H, maior quam dimidium ipſius F H. Eadem ratione oſtendemus F K, maiorem eſſe dimidio ipſius F G. Inæquales ergo ſunt partes F H, H G, partibus F K, K G, ſingulæ ſingulis. Quoniam vero A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. c Igitur & compoſitum ex c 16. ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cum ergo vtrum- decimi.
que ipſorum ſit Medium, erit quoque compoſitum ex ipſis, hoc eſt, E H, per corol. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit E K. d Quare E H, E K, ad Rationalem E F, d 23. applicata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipſi E F, longi- decimi.
tudine incommenſurabiles. Eodem modo cum rectangulum ſub A C, C B, ponatur Medium, erit & quod bis ſub A C, C B, hoc eſt, I G, illi commenſurabile, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem H I, e erit H G, Ratio- e 23.
nalis ipſi H I, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſten- decimi.
demus L G, Medium eſſe, & K G, Rationalem ipſi K L; longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia A C, C B, longitudine, ſunt incommenſurabiles, & eſt vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B. f erit quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, in- f 10.
commenſurabile. Sed quadrato ex A C. commenſurabile eſt com- decimi.
poſitum ex quadratis rectarum A C, C B. (Cum enim A C, C B, potentia ſint commenſurabiles, atque adeo ipſarum quadrata commenſurabilia; g erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſo- g 16.
rum, nimirum quadrato ex A C, commenſurabile.) Rectangulo decimi.
vero ſub A C, C B, commenſurabile eſt, quod bis ſub A C, C B. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, per ſcholium propoſ. 10. huius

libri,



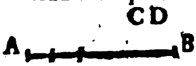
libri, rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt ipſi I G. a 1. ſex. Quocirca *a* cum ſit, vt E H, ad I G, ita F H ad H G. b 10. decimi. *b* erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolum commenſurabiles. c 37. decimi. *c* Igitur F G, tota Irrationalis eſt quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum G. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non d 43. decimi. poteſt, *d* vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quam ad G. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

xlv. xxx1x.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit Maior A C, diuiſa in ſua nomina ad punctum D, ita vt A C, C B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulum vero ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius lib. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoq; ſint potentia facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale & rectangulum ſub ipſis Medium. Si



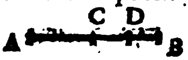
enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, vt in propoſitione 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cum vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoq; eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis e 27. decimi. ſub A D, D B. *e* Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale; Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum

vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47. xlvij. xl.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt A C, C B, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum vero ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius lib. Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat,



oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 45. huius libri, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B. Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt; quod oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarũ A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quia vero compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: *a* Medium autem non ſuperat Medium Rationali; non erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctũ diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat. *a 27. decimi*

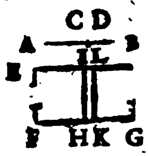
THEOR. 36. PROPOS. 48. xlviij. xlj.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.



SIT linea potens bina Media A B, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex earũ quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina quæ videlicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum

ſub



ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunq; hoc punctum D, exiſtat. Cõſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſ. 45. oſtendemuſque vt ibi, partes F H, H G, partibus FK, KG, inæquales eſſe, ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi cõmenſurabile eſt. Igitur Media EH, I H, applicata ad Rationalem E F, (eſt n. I H, ipſi EF, æqualis) a faciunt latitudines F H, H G, Rationales longitudine ipſi E F, incommenſurabiles.

a 23. decimi.

Eadem quoq; ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi E F. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub A C, C B, nempe rectangulo I G: b eſtque vt EH, ad I G, ita F H, ad HG: erunt FH, H G, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, c iam ante demonſtratũ eſt. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctũ diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

b 1. ſext.

c 43. decimi.

DEFINITIONES
SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quę ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitu-

dine

dine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine: (alias enim nomina ipſa eſſent quoque lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus: vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt: (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionib. hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

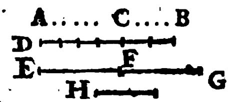
RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commenſurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali: & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur: tertiam vero, in qua neutrum ipſorum nominum expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans: ſecundam, quintam: & tertiam, ſextam.

xlviij. xlij.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ex iis quæ in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus A C, non ſit quadratus, ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad A C, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico F G, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex E F, F G, cum proportionem habeant, quam numeri A B, A C,



a 6. decimi. *a* commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, F G, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa autem eſt EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis eſt. Quia vero AB ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, proportionē quam numerus quadratus ad quadratum. *b* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ E F,
b 9. decimi. FG Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; *c* Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis no-
c 37. decim. minibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AB, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex FG, ſit autem A B, maior, quam A C, erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14.

poſ.14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt vt AB numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac proinde rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionẽ, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominib. primam. Quod faciendum erat. a *9. decimi.*

PROBL. 14. PROPOS. 50.

XLIX.
XLIIJ.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propoſitione, expoſitaq; Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis FG. Erit ergo & FG. Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC ad numerum AB, ita per coroll. propoſ.6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, *b* commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ FG, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis eſt. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *d* Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicit. Dico & ſecundam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propoſ 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque minus nomen FG, expoſitæ Rationali D, commenſurabile b *6. decimi.* c *9. decimi.* d *37. dec.*

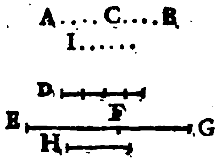
rabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundam. Quod erat faciendum.

5. xxix.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum.



1. xvij. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario (Vnitate quidem, quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10 differens ab 8 binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5 erit non quadratus proxime maior 6, differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. libr. 8. oſtendimus, nō cadet inter I, ad AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propoſ. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF.

a 6. dec. *a* Erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, EF commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtent igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum;

b 9. dec. *b* erunt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat

c 6. dec. vt AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratum ex FG. *c* Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum EF, oſtenſa ſit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet

d 9. dec. quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *d* erunt EF, FG, longitudine incōmenſurabiles. Sunt ergo EF, FG, Rationa-

tiona

tionales potentia tantum commenſurabiles; *a* Atq; idcirco tota EG, Irrationalis ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autem I, ad AC, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; *b* ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Eſt autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sic ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; & neutra ipſarum EF, FG, longitudine cõmenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

a 37. def.

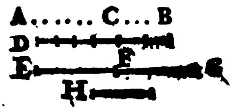
b 9. dec.

PROBL. 16. PROPOS. 52.

lj. XLV.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB, ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; ex iis, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cum Rationali D, cõmenſurabilis ſit. Quod ſi reliqua cõſtruantur, vt in propoſ. 49. oſtendemus ſimiliter, vt ibi, totã EG, ex binis nominib. eſſe. Dico & quartã eſſe. Erit



enim rurſus, vt in 49. propoſ. quadratum ex EF, maius quã quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propoſ. per conuerſionẽ rationis eſt, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H; Non eſt autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neque quadratum ex EF, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratũ. *c* Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt rectæ EF, & H. Itaq; cum maius nomen EF, plus poſſit, quã minus FG, qua- c 9. dec.

drato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & maius rurſus nomen EF, longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

xij. xvj. **PROBL. 17. PROPOS. 53.**

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

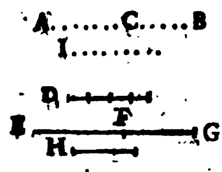
REPERTIS (repetita figura præcedentis propoſ.) duabus numeris AC, CB, vt in præcedenti propoſ. fiat conſtructio, vt in propoſ. 50. hoc eſt, ſumatur FG, longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D, &c. Oſtẽdemus ergo vt in propoſ. 40. EG, eſſe ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. Demonſtrabimus enim eodem modo, vt in 50. propoſ. quadratum ex EF, maius eſſe, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propoſ. 49. oſtenſum eſt per conuerſionem rationis eſt vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Oſtendemus, vt in propoſitione antecedenti, rectas, EF, & H, longitudine incommenſurabiles eſſe. Quare cum maius nomen EF, plus poſſit, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & minus nomen FG, longitudine cõmenſurabile expoſitæ Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

xiij. xxvj. **PROBL. 18. PROPOS. 54.**

INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non ſimilibus, quorum neuter ſit quadratus, & compoſitus ex ipſis AB, non ſit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipſorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, ſi numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter ſe primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipſorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demõſtrauimus.) Sumatur alius numerus quicunq; I; qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis eſt quiuis numerus quadratus Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib.

a 10. ſeptim.



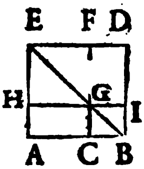
& reli-

& reliqua fiant, vt in propoſ.51. oſtendemuſque vt ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam EG, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & FG, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG Sit ergo maius quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49 per conuerſionem rationis, eſſe vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. a 9. dec. Itaq; cum maius nomen EF, plus poſſit, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine ſit commenſurabilis, & neutrum ipſorum nominum EF, FG, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

Si recta linea ſecta ſit vtcunq;: erit rectangulum ſub partibus contentũ, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum cõtentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

Secta *ſit recta AB, vtcunq; in C. Deſcribatur ex AB, quadratum ABDE, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipſi BD, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumq; autem rectangulorum DG, GA, comprehenſum iiſdem partibus: At vero rectangula CD, AI, ſub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, medium proportionale eſſe inter quadrata FH, CI: At CD, medium eſſe proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim* b *vt HG, ad GI, ita eſt tam FH, ad DG, quam AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* c *Eſt autem AG, ipſi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita ita DG, ad CI: Atque adeo DG, medium proportionale eſt inter quadrata FH, CI.* b 1. *ſexti.* c 43. *primi.*



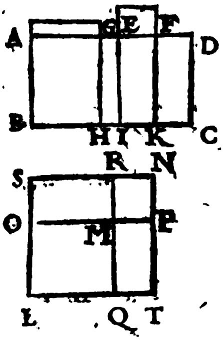
a 1. ſexti. RVRSVS quia eſt, a vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quam AI, ad CI; erit vt AD CD, ita AI, ad CI: Eſt autem AI, ipſi CD, æqualis. Igitur erit vt AD, ad CD ita quoq; CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale eſt inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AE, medium proportionale inter quadrata AD, FH.

xliiij.
xlviij.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quæ poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis; & denique AE, expoſitæ Rationali AB, longitudine commenſurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus poteſt quam ED, quadrato rectæ ſi longitudine cõmenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex ED, hoc eſt, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum ſub AG, GE, contentum, per 2. lemma propoſ. 17 huius lib. applicetur deficiens figura quadrata;



b 18. dec. b in partes longitudine commenſurabiles ipſum diuidet. Quare AG, GE, partes inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipſis AB, BC, parallelæ GH, EI, FK.

c 14. ſecundi. c Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, coniunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulũ M, vt latera MO, MP, vnam rectã lineam conſtituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnam rectã QR, vt demonſtratum eſt à nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quod anguli OMQ, PMR, ad verticẽ M, ſunt æquales, nempe recti. Completo aũt rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales ſint; ideoq; & tota

d 34. primi. OP, toti QR, d ſit autem OP, ipſis SN, LT. & QR, ipſis LS, TN. æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoq; quadratum.

Quo-

QVONIAM vero rectangulum ſub AG, GE, æquale eſt, per conſtructionem, quadrato ex EF, *a* erit vt AG, ad EF. ita EF, ad GE. *b* Ac propterea & vt AH, EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale eſt inter AH, GI, hoc eſt inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale eſt TM, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur eſt TM, ipſi EK. *c* Cum ergo ipſi TM, æquale ſit MS, *d* & ipſi EK, æquale ſit FC, erit & MS, ipſi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale eſt; atq; adeo recta OP, poteſt ſpatium AC, contentum ſub AB. Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

a 17. *ſexti.*
b 1. *ſexti.*
c 43. *primi.*
d 36. *primi.*

QVONIAM enim AG. GE, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles, *e* erit & tota AE, vtrique ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem AE, cum ſit maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commenſurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. longitudine cõmenſurabiles ſunt; Atq; adeo cum AB, ſit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula AH, GI ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus contenta Rationalia ſunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erũt.

e 16. *dec.*
f 20. *dec.*

ET quoniam AE, ipſi ED, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi AE, longitudine oſtenſa cõmenſurabilis AG, & ipſi ED, commenſurabilis eſt longitudine EF, eius dimidia; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & AG, EF, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & AH, EK, *g* eandem proportionem habentia, quam AG, EF, *h* incommenſurabilia ſunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. *i* Igitur rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, *k* cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT Sunt autem & OM, MP, Rationales oſtenſæ Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. *l* Quapropter tota OP, potens ſpatium AC, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur, Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima &c. Quod demonſtrandum erat

g 1. *ſexti.*
h 10. *dec.*
i 10. *dec.*
k 1. *ſexti.*
l 37. *ſexti.*

THEOR. 38. PROPOS. 56.

LIX.
XLIX.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

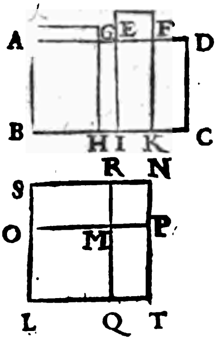
CONTINEATVR ſpatiũ AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpa-

tium

tium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima dicitur Sit enim ipſius AD, mainus nomẽ AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique ED, Rationali expoſitæ AB, longitudine commenſurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi, rectam OP, poſſe ſpatium AC, contentum ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecundæ AD Dico iam OP, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi ED; & ED, minus nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine cõmenſurabilis eſt Rationali AB;
a 13. dec. *a* erunt AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Et quia AG, GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſitione longitudine commenſurabiles; *b* erit quoq; tota AE, vtrique ipſarum cõmenſurabilis. Quare cum AE, maius nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cum ergo vtraque AG, GE, ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis; at vero AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; *c* erit vtraq; AG, GE, eidem AB, incommenſurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles.

b 16. dec.



c 14. dec.

d 22. dec. Igitur *d* rectangula AH, GI, Media ſunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ OM, NP, ſunt Mediæ.

QVIA vero AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles;
e 10. dec. *e* erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commenſurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ OM, MP, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommenſurabiles ſunt; ipſi vero AE, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis AG, & ipſi AD, longitudine commenſurabilis eſt EF, eius dimidia; erunt per ſcholium propoſ. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommenſurabiles: Ac proinde
f 10. dec. AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipſis, *f* incommenſurabilia ſunt. Igitur & LM, MT, ipſis AH, & EK, æqualia,
g 10. dec. incommenſurabilia ſunt; *g* Ideoque & rectæ OM, MP, longitudi-

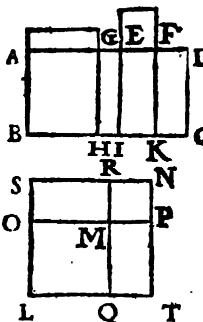
tudine ſunt incommenſurabiles, *a* cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo oſtenſum ſit O M, M P, Medias eſſe, & commenſurabiles, erunt O M, M P, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam denique E D, minus nomen ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi A B, hoc eſt, ipſi E I: Eſt autem E F, ipſi E D, quoq; longitudine commenſurabilis; *b* erunt etiam E I, E F, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis ſit, erit & E F, Rationalis. *c* Quare E K, rectangulum, Rationale eſt; Eſt autem M T, ſub O M, M P, contentum ipſi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale eſt. Quapropter O M, M P, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, Rationaleque continentes; *d* atque adeo O P, Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda. &c. Quod oſtendendum erat.

a 1. ſext. *b 12. decim.* *c 20. decim.* *d 38. decim.*

THEOR. 39. PROPOS. 57. LVI. L.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE Erunt ergo A E, E D, ex definitione, Rationales potẽtia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarum A E, E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatiũ A C: Et vt in antecedenti propoſ. 55. rectas O M, M P, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipſi A B, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam vero ED, E F, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtq; E D, ipſi A B, Rationali, hoc eſt ipſi E I, longitudine incommenſurabilis; *e* erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quod E F, dimidia ſit ipſius E D, Ra-



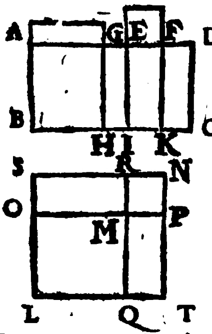
e 14. decim.

ED, Rationalis: & E I, expoſitæ Rationali A B, æqualis. Igitur a ED,
a 22. decim. E I, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles: a Ac
propterea E K, Medium eſt: ideoq; & M T, æquale ipſi E K, Medium
eſt, quod ſub Mediis O M, M P, continetur. Itaq; cum O M,
M P, Mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, contineantque
b 22. decim. ſpatium Medium: b erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Mediis
ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali,
& ex binis nominib. tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

lvij. lj. **THEOR. 40. PROPOS. 58.**

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

Contineatvr ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim A E, ipſius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles: & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique A E, ipſi A B, commenſurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F,
c 19. decim. c fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. Erunt ergo A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, O P, poſſe ſpatium A C.



Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam enim
d 10. decim. A G, G E, longitudine incommenſurabiles ſunt: d erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia: atque adeo & quadrata L M, M N, ipſis A H, G I, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commen-
e 20. decim. ſurabilis Rationali A B: erit & A E, Rationalis: e & rectangulum A I, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem A I, æquale compoſito ex quadratis L M, M N. Compoſitum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale eſt.

Et quoniam E D, minus nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali A B, erit & E F, ipſius dimidia eidem A B, longitudine incommenſura-

ſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cum ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB Rationales ſunt potentia ſolũ commenſurabiles. *a* Quare EK, Medium eſt, ſub ipſis contentum: ideoq; & MT, illi æquale, cõtentumq; ſub OM, MP, Mediũ eſt. Quocirca cum OM, MP, ſint potẽtia incõmenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale: Rectangulum vero ſub ipſis MT, Medium, *b* Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali: & ex binis nominib. quarta, &c. Quod erat oſtendendũ. a 22. decimi. b 40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59. lviij. liij.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatiũ AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles: & AE, plus põt, quam ED, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis: & deniq; ED, longitudine cõmenſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, biſariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. *c* Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incõmenſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectã OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantum commenſurabiles. *d* Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cum ſit minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF, ipſius dimidia eidem AB, commenſurabilis longitudine, & Rationalis. *e* Quare EK, ſub Rationalibus EI, EF, longitudine cõmenſurabilibus, Rationale eſt: atq; idcirco & MT, ſub OM, MP, contentum Rationale erit, cum ipſi EK, ſit æquale. Quamobrem cum rectæ OM, MP, potentia incommẽſurabiles ſint, faciantq; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, ſub ipſis contentum, Rationale: *f* Irrationalis erit tota OP, quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium contineatur. c 19. decimi. d 22. decimi. e 20. decimi. f 41. decimi.

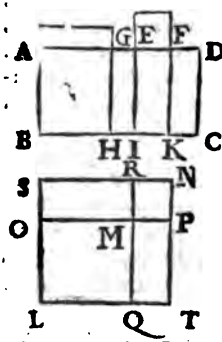
tinea-

tineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erit demonſtrandum.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

lix. liij. Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

Contineatur ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſexta A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipſius A D, maius nomen A E. Sunt ergo A E, E D, ex defin Rationales potentia tantum commenſurabiles, & A E, plus poterit, quam E D quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum A E, E D, longitudine erit commenſurabilis
a 19. decim. Rationali A B. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus, a eruntq; A G, G E, lõgitudine incommenſurabiles. Iam vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium A C. Itẽ vt in propoſ. 58. rectas O M, M P, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L M, M N, Medium. Vt autem in propoſ. 58, erit quoq; M T, ſub O M, M P, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum A E, E F, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi E D, hæc vero eidem commenſurabilis;



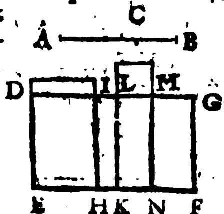
b 13. decim. b erunt A E, E F, longitudine incommen-
c 10. decim. ſurabiles. c Igitur & A I, E K, incommen-
d 1. ſex. ſurabilia ſunt, d cum eandem rationem habeant, quam A E, E F. Quare & compoſitum ex quadratis L M, M N, quod ipſi A I, æquale eſt, & rectangulum M T, quod ipſi E K, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ O M, M P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis L M, M N, Medium, & M T, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum
b 42. decim. quadratis, e erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

lx. liiij. Quadratum eius, quæ eſt ex binis nominibus

nus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; a & ad Rationalem expoſitam D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB latitudinem faciens D G. Dico DG, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B, b æqualia ſint quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale eſt, per conſtructionem, rectangulum D F. Secetur L G, biſariam in M; puncto, per quod ipſis L K, G F, parallela agatur, M N: eritque vtrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod ſub A C, C B, continetur. c Et quoniam AC, C B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quod tota A B, ſit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commenſurabilia; d quorum vtrique cum etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis: erit quoque compoſitum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit: quod cum applicatum ſit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipſi D E, longitudine commenſurabilem.



Rursus quia A C, C B, Rationales ſunt ſolum potentia commenſurabiles, e erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atque adeo, & quod bis ſub ipſis, cum ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum L F, Medium erit, per coroll. propoſ. 24 huius lib. Quare L F, applicatum ad LK, Rationalem; f facit L G, latitudinem Rationalem, & ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilem. Eſt autem D L, oſtenſa eidem D E, commenſurabilis longitudine. g Igitur D L, L G, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commenſurabiles; h Ac propterea D G, ex binis nominibus eſt. Dico & primam eſſe.

Quoniam enim ex lemmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub A C, C B, medium proportionale eſt inter quadrata ex A C, C B: erit quoq; L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo i cum rectæ D I, L M, I L, eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K: erit quoque recta L M, media proportionalis inter D I, I L. k Quare rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commenſurabilia ſunt; quod A C, C B, ponantur potentia commenſurabiles;

a 45. primi.
b 4. ſecundi.
c 37. decimi.
d 16. decimi.
e 22. decimi.
f 23. decimi.
g 13. decimi.
h 37. decimi.
i 1. ſexti.
k 17. ſexti.

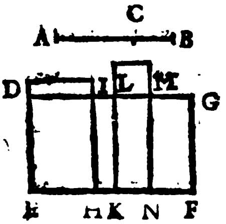
a 10. decim. erunt & DH IK, ipſis æqualia commenſurabilia. a Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint per lemma propoſ. 39 huius libri, quam rectangulum bis ſub A C, C B; erit & recta DL, maior quam LG, b cum DL, LG, eandem rationem habeant, quàm DK, LF. Itaque quoniam D L, maior eſt, quam L G, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub D I, IL, æquale quadrato ex LM) diuiditurque DL, ad I, in partes DI, IL, c 18. decimi. longitudine commenſurabiles; vt eſt demonſtratum; c poterit DL, maior plus quam L G, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum D G, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & D L, maius nomen plus poſſe, quam L G, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen D L, longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominib. prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum erat.

b 1. ſext.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

lxj. lv.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.



SIT ex binis Mediis prima A B, cuius maius nomen AC, d & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens DG. Dico D G, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituantur eadem, quæ in propoſ. præcedenti, ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex A C, C B, & vtrumque ipſorum L N, M F, ei quod ſub A C, C B, continetur. Quoniam igitur e 38. decim. A C, C B, ex binis Mediis primam A B, componentes e Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent: erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipſis f 16. decim. æqualia DH, I K, commenſurabilia, atque Media. f Cum ergo propterea & totum D K, vtrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile; erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius libt. D K, Medium, quod cum applicatum ſit ad Rationalem D E, g erit eius g 23. decim. latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis.

d 45. primi.

bilis. Ruſſus quoniam rectangulum ſub A C, C B, Rationale eſt, erit & eius duplum, nempe L F, Rationale, quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K, *a* erit eius latitudo L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipſa L G ſit ipſi D E, commenſurabilis longitudine, at D L; longitudine incommenſurabilis; *b* erunt D L, L G longitudine incommenſurabiles. Quod cum D L, L G, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia ſolum commenſurabiles; *c* ac propterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam vero, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L, maius nomen eſſe, & poſſe plus, quam minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quocirca cum ipſius D G, maius nomen D L, plus poſſit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & minus nomen L G, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, &c. Quod erat oſtendendum. *a* 21. *decimi.* *b* 13. *decimi.* *c* 37. *decimi.*

THEOR. 45. PROPOS. 63. lxiij. lvj.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Mediis ſecunda A B, cuius maius nomen A C; *d* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ex binis nominibus tertiam. Conſtructis enim iiſdem, quæ in propoſ. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis ſecundam A B, componentes, *e* Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent: Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia, & Media. *f* Cum ergo propterea & totum D K, vtrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile, erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri D K, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem D E, *g* erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt; erit & eius duplum L F, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; *h* erit latitudo L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, ipſi C B, longitudine eſt incommenſurabilis: eſtque vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſitionis 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B; *i* erit quoque quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. *k* Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex qua- *d* 45. *primi.* *e* 39. *decimi.* *f* 16. *decimi.* *g* 23. *decimi.* *h* 23. *decimi.* *i* 10. *decimi.* *k* 16. *decimi.*

dratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, commenſurabilia ſint, quippe cum rectæ ipſæ potentia ponantur commẽſurabiles; & rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub AC, CB. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, C B hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. conſcripſimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum D K, L F, habentes *a* longitudine ſunt incommenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum cõmenſurabiles; *b* ac propterea tota D G; ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ. 61. oſtendemus D L, eſſe maius nomen, poſſeq; plus, quam minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrem cum DL, maius nomen plus poſſit, quam L G, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum D L, L G, Rationali expoſitæ D E, ſit oſtenſa longitudine commenſurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandum.

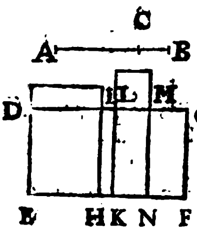
a 10. decim.

b 37. decim.

lxiij. lvij.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT maior A B, cuius maius nomen AC; *c* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B; latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruantur enim eadem prorſus, quæ in propoſ. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, *d* potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero ſub ipſis, Mediũ; erit quoque DK, cõpoſito ex quadratis rectarũ A C, C B, æquale exiſtens, Rationale; At vero L F, duplum eius quod ſub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale DK, ad Rationale D E, eſt applicatum; *e* erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Item cum L F, Medium ſit applicatum ad Rationalem L K, *f* erit L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, D E, longitudine incommenſurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipſi D E, commenſurabilis ſit longitudine: hæc vero eidem D E, longitudine incommenſurabilis; *g* incommenſurabiles e-

c 45. primi.

d 45. decim.

e 21. decimi.

f 23. decimi.

g 13. decimi.

les erunt longitudine DL, LG: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *a* Ideoq; DG, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ. a 37. decim.
61. demonſtrabimus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM. Quia aũt quadrata ex AC, CB, commenſurabilia ſunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommenſurabilia, *b* atq; adeo & re- b 10. decim.
ctæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam vero vt in propoſ. 61. oſtendimus, DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam DL, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles, *c.* poterit DL, plus c 19. dec.
quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cum & ipſa DL, (maius nomen ipſius DG, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominib. quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65. LXIV. LVIIJ.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur d 45. primi.
æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, *e* potentia incommenſurabi- e 41. dec.
les ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectangulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale compoſito ex quadratis rectarũ AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atque adeo ipſius duplum, LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, *f* facit latitudinem DL, Rationalem, & f 23. dec.
longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, *g* facit latitudinem g 21. decim.
LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commenſurabilis eſt Rationali DE, illa vero longitudine incommenſurabilis, *h* erunt DL, MG, longitudine h 13. decim.
incommenſurabiles. Quare DL, LG Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; *i* Ac propterea DG, eſt ex binis nomi- i 37. decimi.

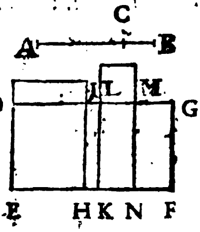
nibus. Iam vero, vt in propoſ. 61. oſtendemus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM, & vt in antecedenti propoſ. DL, maius nomen eſſe, atq; poſſe plus, quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, oſtenſum ſit expoſitæ Rationali DE, longitudine commenſurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

LXV.
LIX.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

a 45. primi. SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, a & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico, DG, eſſe ex binis nominibus ſextam. Conſtructis enim iiſdem, quæ in propoſ. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipſam AB, potentem bina Media, b potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum; erit tam DK, illi compoſito æquale, quã LF rectangulo bis ſub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata ſunt ad Rationalem DE; c erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. d Quoniam vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AC, CB; eidem vero rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, CB, cum hoc illius ſit duplum; e Erit compoſitum ex dictis quadratis, hoc eſt, DK, incommenſurabile rectangulo bis ſub AC, BC; hoc eſt, ipſi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem Rationem habentes cum DK, LF, f longitudine incommenſurabiles ſunt Rationales ergo ſunt DL, LG, potentia ſolum commenſurabiles; g Ac proinde DG, eſt ex binis nominibus. Iam vero; vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus DL, eſſe maius nomen, poſſeq; plus quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cum ergo oſtenſum ſit neutram ipſarum DL, LG, longitudine commenſurabilem eſſe expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſexta. Quadratum igitur eius, quę bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. Quod erat oſtendendum.



b 42. dec.
c 23. dec.
d 42. dec.
e 13. dec.
f 10. decim.
g 37. dec.

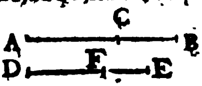
THEOR.

lxvj. lx.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

EI, quæ eſt ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atq; ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque AB, diuiſa in ſua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, ſitq; recta DE, ipſi AB, longitudine commẽſurabilis. Dico DE, quoque eſſe ex binis nominibus, & ordine eandem ipſi AB. *a* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *b* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, longitudine commenſurabilis ponitur DE; *c* erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis: *d* Sunt autem AC, CB, cum ſint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia ſolum commenſurabiles; *e* erunt & DF, FE, potentia ſolum cõmenſurabiles. Igitur DF, FE, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; *f* Ac propterea DE, ex binis eſt nominibus. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. Aut enim AC, plus poteſt quam CB, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si quidem AC, plus poteſt quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; *g* poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi AC, commenſurabilis ſit lõgitudine Rationali expoſitæ, ita vt AB, ſit ex binis nominibus prima; *h* erit & DF, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, ſit cõmenſurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. eſt ex binis nominibus prima, hoc eſt, ordine eadem. Si vero CB, expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis, vt AB, ſit ex binis nominibus ſecunda; erit eodem modo & FE, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis. Quare & DE, ex defin eſt ex binis nominibus ſecunda. Si deniq; neutra ipſarum AC, CB, longitudine ſit commenſurabilis expoſitæ Rationali, ita vt AB, ſit ex binis nominib. tertia; *i* erit & neutra ipſarum DF, FE, longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali. Quare & DE, ex defin. eſt ex binis nominibus tertia.



a 11. *ſexti.*
b 19. *quinti.*
c 10. *dec.*
d 37. *dec.*
e 10. *dec.*
f 37. *dec.*
g 15. *dec.*
h 12. *decimi.*
i 12. *dec.*

AT ſi AC, plus poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; *k* poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE, ex binis nominibus quartam eſſe, vel quintam, vel ſextam, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quin-

k 15. *decimi.*

quinta, vel ſexta. Si igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVOD *ſi recta DE, potentia tantum commenſurabilis ſit ipſi AB, quæ eſt binis nominibus, oſtendemus quidem eodem modo, (ſi loco: Commenſurabilis longitudine: in demonſtratione reponamus vbique: cõmenſurabilis potentia tantum:) & DE, eſſe ex binis nominibus. At eam eſſe ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis eſt, nullo modo concludemus. Non enim ſequitur, ſi AC, maius nomen longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali; & DF, maius nomen eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expoſita Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine: At vero DF, potentia tantum, ex hypotheſi. Imo vero, ſi AB, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione poteſt, vt DE, illi potentia tantum commenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.*

SIT *enim AB, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diuiſa in ſua nomina ad C, ſitq; ei commenſurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diuiſamq; eſſe in ſua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri poſſe, vt DE, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi AB. Nam ſi poteſt fieri, ſit vtraq; ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumq; maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expoſitæ commenſurabile longitudine.* a 12. dec. *a Quare & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt.* b 10. dec. *Et quoniam eſt vt AC, ad DF, ita AB, ad DE, b erunt propterea & AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima eſt. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; ſecunda vel quinta. Eſſet enim vtrumq; nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ, atq; adeo & inter ſe. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.*

SEMPER *tamen verum eſt, ſi AB, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilem, eſſe quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabil. Cum ergo ſit, vt AC, ad CB, ita* c 15. dec. *DF, ad FE, c poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus*

poſſit

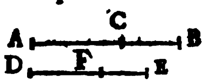
Poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, a poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex d defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel ſexta, licet non eadem ordine ipſi AB. a 15. decimi.

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.

THEOR. 50. PROPOS. 68. LXVij. LXij.

EI, quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atq; ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus; ſitque ei recta DE, longitudine commenſurabilis. Dico DE, quoque ex binis Mediis eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. b Fiat enim vt tota AB ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF, c Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, ponitur longitudine cõmenſurabilis DE; d erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. e Igitur & DF, FE, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: f Sunt autem AC, CB, potentia ſolum commenſurabiles; g erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cum ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commenſurabiles; h Atq; idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipſi AB, eandem eſſe ordine. Quoniam enim eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3 propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. i Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, cõmenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; k atq; adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, ſit ex binis Mediis ſecunda: erit & rectangulum ſub DF, FD, ei



b 11. ſexti. c 19. quinti. d 10. dec. e 24. dec. f 38. dec. g 10. dec. h 38. vel 39. decimi. i 10. dec. k 18. dec.

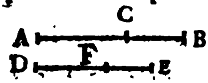
commenſurabile, Medium, ex corollario propoſ 24. huius lib. a 32. dec. *a* Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cōmenſurabilis, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

EODEM *prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi AE, quæ eſt ex binis Mediis, ex binis Mediis eſſe, atq; ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis eſt, ſi modo loco: commenſurabilis longitudine: in demonſtratione dicamus vbique: commenſurabilis potentia tantum, &c. vt manifeſtum eſt.*

lxviij. THEOR. 51. PROPOS. 69.
lxij. MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.

SIT linea Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis ſit DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuperius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE.



Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ſunt vel lõgitudine & potẽtia, vel potentia tantũ; b 12. dec. *b* erunt quoq; tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commenſurabiles. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, c 22. ſexti. *c* erit vt quadratum ex AC. ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE. ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. d 10. dec. *d* Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum DF, FE. e 40. dec. *e* Eſt autem compoſitum illud Rationale, cum f 9. defin. rectæ AC, CB componant Maiorem AB. *f* Igitur & hoc Rationale eſt.

RVRSVS quia eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lem-

ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoq; vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB; ad rectangulum ſub DF, FE: Eſt autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commenſurabile, quod rectæ AC DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. *b* Eſt autem rectangulum ſub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum ſub DF, FE, illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quoniam vero eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, *c* ſuntque AC, CB, potentia incommenſurabiles, cum componant Maiorem AB; *d* Erunt quoque DF, FE. potentia incommenſurabiles. Itaque cum DF, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium, vt oſtenſum eſt; *e* erit tota DE, Maior. Maiori ergo commenſurabilis & ipſa Maior eſt: Quod demonſtrandum erat.

a 10. *dec.*
b 40. *dec.*
c 40. *dec.*
d 10. *dec.*
e 40. *dec.*

THEOR. 52. PROPOS. 70.

LXIX.
LXIII.

RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac medium potens eſt.

SIT (repetita figura antecedentis propoſ.) recta AB, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eiq; commenſurabilis DE ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, eſſe potentem Rationale ac Medium. Conſtructis enim iiſdem quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, cõmenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, FE: *f* Eſt autem illud compoſitum Medium, cum rectæ AC, CB, cõponant ipſam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub AC, CB, *g* quod Rationale eſt, cõmenſurabile rectangulo ſub DF, FE, atque adeo & rectangulum ſub DF, FE, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt DF, FE, potentia incommenſurabiles. Quare cum DF, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratũ eſt; *h* erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

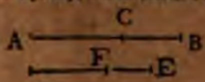
f 41. *dec.*
g 41. *dec.*
h 41. *dec.*

THEOR.

LXX. LXIV. THEOR. 53. PROPOS. 71.

Bina Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

Sit bina Media potens AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia ſiue potentia tantum. Dico & DE, eſſe bina Media potentē. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus, vt in propoſ. 69. compoſitum ex quadratis rectarum AB, CB, compoſito ex quadratis rectarum DF, FE, commenſurabile eſſe: Nec non & rectangulum ſub AC, CB, eſſe commēſurabile rectangulo ſub



a 42. decim. DF, FE. a Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulum ſub AC, CB, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius lib. tam compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, quam rectangulum ſub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incōmenſurabiles ſunt, vt prius. Po-
b 42. dec. ſtremo b quia compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum ſub AC, CB, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod AB, bina Media poteſt; Eſt autem compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile oſtenſum compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulo ſub AC, CB, probauimus commenſurabile rectangulum ſub DF, FE; Erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque
c 42. dec. compoſito ex quadratis ipſarum; c erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commenſurabilis, & ipſa Media potens eſt. Quod erat oſtendendum.

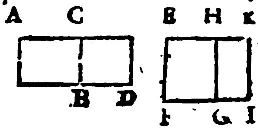
LXXI. LXV. THEOR. 54. PROPOS. 72.

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

Sit Rationale ſpatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatiū AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorē, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Æquale ſiquidem non erit, alias cum AB, ſit Rationale, eſſet & illi æquale CD, Rationale quod nō ponitur. Sit primo maius,

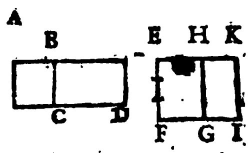
maius, a & expoſita Rationali E F, applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipſi A B, & ad H G, aliud H I, æquale ipſi C D, vt totum E I, toti A D, ſit æquale. Et quoniam A B, Rationale eſt, & C D, Medium, erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem E F, b erit E H, Rationalis, & ipſi E F, longitudine commenſurabilis; c At vero H K, Rationalis & eidem E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia E G, H I, incommenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus: quod E G, Rationale ſit, at H I, Irrationale, nempe Medium: d erunt E H, H K. eandem cum illis habentes rationem, incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt E H, H K, potentia ſolum commenſurabiles; e Ac propterea E K, ex binis nominibus eſt. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc eſt, E G, quam H I: erit quoque E H, maior quam H K, f cum D H, H K, eandem rationem habeant, quam E G, H I. Iam vero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit E H, quam H K, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & ſpatium A D, compoſitum ex Rationali A B, & Medio C D, g Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

a 45. primi.
b 21. decim.
c 23. decim.
d 10. decim.
e 37. decim.
f 1. ſex.
g 55. decim.



Si vero E H, plus poſſit quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit E K, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum E H, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & ſpatium A D, h Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior. h 58 decim.

Sit deinde A B, minus quam C D, & eadem conſtruantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, E K, ex binis nominibus & E H, ipſi E F, longitudine commenſurabilis. Et quia A B, minus eſt quam C D, hoc eſt, E G, quam H I: erit quoque recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rurſus H K, maius nomen ipſius E K, quæ eſt ex binis nominibus, plus quã E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis: erit E K, ex binis nomini-



nominibus ſecunda; cum E H, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali E F, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus ſecunda E K, atque adeo & ſpatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compoſitum; *a* Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Mediis prima. a 56. decim.

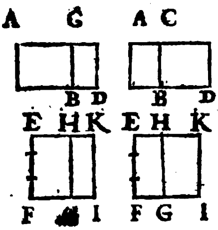
Si vero H K, plus poſſit quam E H, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atque adeo & ſpatium A D, *b* Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat. b 59. decim.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

lxxij. lxvj.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis ſecunda, vel bina Media potens.

Componantvr duo Media incommenſurabilia A B, C D. Dico rectam quæ poteſt totum ſpatium A D, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media potentem. Erit enim rurſus A B, vel maius, quam C D, vel minus: Æquale ſiquidem non erit: alias eſſent A B, C D, commenſurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia A B, C D, ponuntur Media, & incommenſurabilia; erunt & ſpatia E G, H I, Media & incommenſurabilia: cum illis ſint æqualia. *c* Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem; longitudine incommenſurabiles ſunt: & vtraque (cum E G, H I, Media ſint, applicenturque ad Rationalem E F,) *d* Rationalis eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis, Rationales ergo ſunt E H, H K, potentia ſolum commenſurabiles: *e* ac propterea E K, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit vt in antecedenti propoſ. E H, maius nomen ipſius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit E H, quam H K, quadrato rectæ ſibi cõmenſurabilis longitudine; c 10. decim. d 23. decim. e 37. decim.



cum vtrumque nomen EH, HK, oſtenſum ſit lõgitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & ſpatium AD; *a* Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur. a 57. decimi.

Si vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD, *b* Irrationalis eſt; quæ bina Media potens nominatur. b 60. decimi.

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD, non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales ſiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, *c* latitudinem efficit Rationalem ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. c 23. decimi.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, *d* latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61. decimi.

ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, *e* latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, *f* latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. e 62. decimi. f 63. decimi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum *g* latitudinem facit ex binis nominibus quartam. g 64. deci.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem facit ex binis nominibus quintam. h 65. decimi.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. i 66. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus: perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus: & eius, quæ ex binis Mediis prima: & eius, quæ ex binis Mediis ſe-

dijs ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

IN *ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe in ſua nomina.*

IN *tertio deinde contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicũtur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.*

IN *quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.*

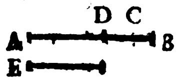
IN *quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.*

IN *ſexto vero, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.*

IN *ſeptimo denique contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.*

REPERITVR *autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis Lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.*

SIT *enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB. bifariam in D; & eius dimidiæ AD, vel DB, æqualis ſumatur E.*



Dico E, mediam eſſe ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim AC, ſuperat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, ſuperat ipſam CB, eadem recta DB: perſpicuum eſt, dimidiam ipſius AB, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter AC, CB in Analogia Arithmetica.

RVRSVS *quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hæc illius ſit dupla: erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.*

IDEM *oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.*

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenariis de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. lxxiij. lxviij.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim per lemma 3. propoſ. 19. huius libr. eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB ad rectangulum ſub AB, AC; Et ſunt AB, AC, longitudine incommenſurabiles;



a erunt incommenſurabilia quadratum ex AB, & rectangulum ſub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commenſurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commenſurabilia. *b* Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero ſub AB, AC, commenſurabile eſt rectangulum ſub AB, AC, bis. Igitur cõpoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum ſub AB, AC, bis contentum, incommenſurabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri demonſtrauimus. *c* Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, ſit Rationale: (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex AB, linea Rationali deſcripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale: atque adeo & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

a 10. decim.

b 16. decim.

c 7. ſecundi.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotóme.

NAM cum A B, A C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles: a erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, vt relinquatur Apotome B C.

a 37. decim.



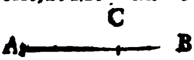
lxxiv. lxix.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale cõtineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media A B, Media A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi A B, ſitque rectangulum ſub A B, A C, Rationale. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim A B, A C, potentia ſunt commenſurabiles: erunt quadrata ex A B, A C, commenſurabilia, b atque adeo & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A C. Eſt autem quadratum ex A C, Media Irrationalis & Medium. Igitur ex coroll. propoſ. 24. huius libr. & compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum ſub A B, A C, ponitur Rationale: erit & rectãgulum bis ſub A B, A C, Rationale. Igitur incõmenſurabile eſt cõpoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, rectangulo bis ſub A B, A C. c Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale ſit rectangulo bis ſub A B, A C, vna cum quadrato ex BC; erit quoq; rectangulum bis ſub AB, A C, vna cũ quadrato ex B C, incommenſurabile rectangulo bis ſub A B, A C. d Quare & rectangulum bis ſub A B, A C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia ſunt: Exiſtente ergo rectangulo bis ſub A B, A C, Rationali: erit quadratum ex BC, Irrationale: ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in ſcholio ſequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod oſtendendum erat.

b 16. decim.



c 7. decimi.

d 17. decim.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propoſitio proponi hoc modo.

Si à

Sɪ à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim A B, A C, ſint Media potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale; a erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori A B, ut relinquatur BC, Media Apotome prima. a 38. decimi.

THEOR. 58. PROPOS. 76. lxxv.

Sɪ à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda. lxx.

Dᴇᴛʀᴀʜᴀᴛᴜʀ à Media A B, Media A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi A B, ſitque rectangulum ſub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex A B, A C, potentia commenſurabilibus commenſurabilia ſunt; b erit & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile: eſt autem vtrumq; ipſorum Mediũ, b 16. decimi.



quod & rectæ A B, A C, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulum ſub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videl. bis ſub A B, A C, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. c Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarũ AB AC, æquale ſit rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex B C; ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub A B, A C, quod etiam Medium eſt, quadrato ex BC. d Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & ipſa recta B C, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, à maiori nomine, vt ex ſcholio ſequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat oſtendendum. c 7. ſecundi. d 27. dec.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuiſſet proponi.

Sɪ à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

QVONIAM enim AB, AC, Media ſunt potentia tantum commen-
a 39.decim. *ſurabiles, continentque Medium: a erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome ſecunda.*

lxxvj.
lxxj.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale: quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis: Sit autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex



quadratis rectarum AB, AC, Rationale eſt; rectangulum vero ſub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propoſ. 24. huius libr. & ei commenſurabile, hoc eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, Medium, hoc
b 10.decim. eſt, Irrationale: b erit compoſitum ex quadratis rectarum AB,
c 7.ſecundi. AC incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. c Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile erit. Ponitur au-
d 10.defin. tem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. d Igitur quadratum ex BC, illi incommenſurabile, Irrationale eſt, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in ſcholio ſequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod au-
e 40.decim. *tem ſub ipſis continetur, Medium: e erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ vocatur Maior, cuiusque maius nomen AB, minus autem AC.*

Aufe-

Auſertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

LXXVij. LXXij.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota facit cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis cõtinetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incõmenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, AC, atq; adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub AB, AC, Rationale; *a* erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. *b* Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, AC. *c* Sunt ergo rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale ſit; *d* erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Rationale eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium exiſtit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtẽs toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

a 10. *defin.*
b 7. *ſecundi.*
c 17. *decim.*
d 10. *defin.*



SCHOLIVM.

HOC *etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.*

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM *enim AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; e erit compoſita ex ipſis Irrationalis,* e 41. *dec.*

x 3

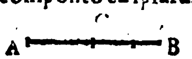
nalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

lxxviij.
lxxiij.

THEOR 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sitq; tam compoſitum ex ipſarum quadratis, quam rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem.



a 7. *ſecundi.* *a* Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale eſt rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis ſub AB, AC, quod ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium etiam eſt, (cum Medio, quod ſub AB AC, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex BC. b 27. *dec.* *b* Medium autẽ non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis ſub AB AC, quod Medium eſt facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam eſt. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

IN *hunc modum proponi quoque potuiſſet hoc theorema.*

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

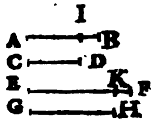
QVONIAM *cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum, erit compoſita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.*

LEM.

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui intertertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.

SINT *quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, ſitque IB, exceſſus inter AB, CD, æqualis exceſſui KF, inter EF, GH, Dico eundem eſſe exceſſum inter AB, EF, qui eſt inter CD, GH. Quoniam enim IB, exceſſus eſt inter AB, & CD; erit AI, ipſi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipſi GH. Idem igitur exceſſus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis.*



Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoq; exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.

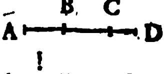
COROLLARIVM.

EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe, inter primam, & tertiam magnitudinem, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundã, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, & hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80. LXXIX. LXXIV.

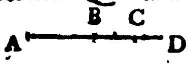
APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam Rationalẽ non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis.



Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia commenſurabilis, Rationalis Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantũ commenſurabiles. Eodẽ

modo erunt & AD, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis ſub AC, BC, qui inter compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis ſub AD, BD; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis ſub AC, BC, quadrato ex



a 7. ſecundi.

AB; a quod compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compoſitum ex quadratis rectarum AD BD, ſuperat

b 7. ſecundi.

rectangulum bis ſub AD, BD, quadrato eodem ex AB; b cum & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub AD, BD, vna cum quadrato ex AB,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, DB. Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27 huius lib. quod vtrumq; Rationale ſit. (Nam cum AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; erunt earum quadrata Rationalia,

c 16. dec.

& commenſurabilia. c Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; illorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium Rationale eſt.

d 22. dec.

d Et quia rectangulum ſub AC, BC Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24 huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC; Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum

e 27. dec.

bis ſub AD, BD. e Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Rationalis nõ congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

LXXX.
LXXV.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

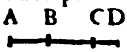
MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipſi congruat AC, Media toti AC, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum ſub

AC, BC.

AC, BC, ſit Rationale. Dico ipſi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commenſurabilis, ſitq; rectangulum ſub AD, BD, Rationale. Et quia BC Media eſt potentia ſolum ipſi AC, commenſurabilis; a erit & AC, Media, cum illi ſit commenſurabilis. Mediæ ergo ſunt AC, BC, potentia tantum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, vt in propoſ. præcedenti oſtenſum eſt: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſitionis 27. huius lib. ſpatium Rationale; quod vtrumque ſit Rationale. (cum enim rectangulum ſub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub AC BC, illi commenſurabile, Rationale. Atq; eadem ratione Rationale erit rectangulum bis ſub AD, BD.) Igitur & exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erunt & ipſarum quadrata Media, & commenſurabilia. b Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile eſt, atque adeo & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compoſitum ex quadratis rectarũ AD, BD. c Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & cõpoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia ſolum commenſurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 24. decim.



b 16. dec.



c 27. dec.

LXXXI. LXXVI.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

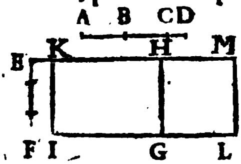
MEDIÆ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome ſecunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commenſurabilis, & rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium. Dico ipſi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatq; cum tota Medium. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia

 BD, Me-

BD. Media toti AD, potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF,
a 45. primi. *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale compoſi-
b 7. ſec. to ex quadratis rectarum AD, BD. *b* Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur ſub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur ſub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cum enim BC, Media ponatur,
c 24. dec. *c* erit & AC, ipſi potentia commenſurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia.

Ergo & compoſitum ex ipſis commẽſurabile eſt vtriq; eorum;
d 16. dec. atque idcirco & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. *d* Igitur & EG, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cum
e 23. dec. applicetur ad Rationalem EF, *e* erit



EH, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib & eius duplum, nempe KG, Medium; quod cum applicetur ad Rationalem
f 23. dec. KI, *f* erit KH, Rationalis ipſi KI, hoc eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtq; vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, vt oſtendimus lemmate 3. ad propoſ. 19. huius
g 10. dec. lib. *g* erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commenſurabiles;
h 16. decim. erunt & earum quadrata commenſurabilia. *h* Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique ipſorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile eſt eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipſi KG, incommenſurabile eſt, eſt iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.
i 10. dec. *i* Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommenſurabiles ſunt, ſed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH,
k 74. dec. potentia ſolum commenſurabilis ipſi EH, *k* erit EK Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonſtrabimus EK, Apotomen eſſe, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis

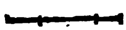
exiſtens

exiſtens toti: quod eſt abſurdum. Vnam enim tantum cõgruere, a demonſtratum eſt. Igitur mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. a 80. dec.

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82. 77.

MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum ſub AC, BC, Medium. Dico ipſi AB, aliam nõ congruere, quæ eadem præſtet. Sit enim, ſi fieri poteſt, alia congruens BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulũ ſub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propoſ. 80 demonſtratum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autẽ exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulũ bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD BD, ſpatium eſt Rationale, ſed & non Rationale eſt. (Cum enim rectangulum ſub AC, BC, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub AD, BD. b Quare vnum non ſuperabit alterum Rationali. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, nõn congruit potentia toti incommẽſurabilis, &c. Minori ergo vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. b 27. dec.



THEOR. 66. PROPOS. 84. 83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC potentia incommenſurabilis, faciensque

cienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium rectangulũ vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam nõ congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam



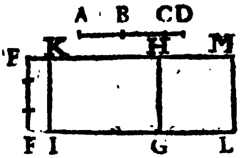
igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cum vtrumq; ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 27. dec.

LXXXIV.
LXXIX.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis.



Sit recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipſi vero congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, facienſque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub AC, BC, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia BD, toti AD, potentia commenſurabilis, ita vt & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, Medium ſit, & rectangulum ſub AD, BD, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam EG, illi æquale, Medium

dium. *a* Recta igitur E H, Rationalis eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AG, BC, Mediũ eſt; erit & eius duplum xG, Medium. *b* Igitur & recta KH, Rationalis eſt, longitudine ipſi E F, incommenſurabilis. Et quoniam xG, commenſurabile eſt rectangulo ſub AC, BC, cum illud huius ſit duplum; at rectangulum ſub A C, B C, incommenſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum AC, BC: *c* erit quoque xG eidem compoſito, hoc eſt, ipſi E G, incommenſurabile: ac propterea rectæ EH, xH, eandem habentes cum E G, x G, rationem, *d* longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare cum ex Rationali E H, auferatur Rationalis x H, potentia ſolum commenſurabilis ipſi E H; *e* erit E x, Apotome, & ei congruens xH. Non aliter oſtendemus E x, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe x M. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod eſt abſurdum. *f* Vnam enim tantum congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

a 23. *decimi.*
b 23. *decim.*
c 14. *decim.*
d 10. *decim.*
e 74. *decim.*
f 80. *decim.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis: Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis: Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IV.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudinè commenſurabilis: Vocetur Apotome quarta.

SI

V.

Si vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

Qvod ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

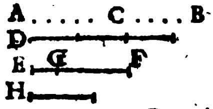
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

85. 80. Invenire primam Apotomen.

Repertis duobus numeris quadratis A B, C B, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri docuimus, quorum exceſſus A C, non ſit quadratus: ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum: at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit E F. Eritque E F, cum commenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, eſſe primam Apotomen. a Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo E F, oſtenſa ſit Rationalis: erit & G F, Rationalis. Quia vero AB, A C, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex E F, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. b Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo ſunt E F, G F, potentia tantum commenſurabiles; c atque idcirco reliqua E G, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſſit enim recta E F, plus quam recta GF, quadrato ex H. Et quia eſt, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: erit per conuerſionem rationis, vt AB, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati.



a 6. decim.

b 9. decimi.

c 74. decim.

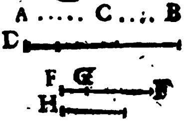
Igitur

igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; *a* Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur tota E F, plus poteſt, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; tota eadem E F, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine: erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. *a 49. decimi.*

PROBL. 20. PROPOS. 87. 86. 81.

INVENIRE ſecundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propoſ. præcedenti: expoſitaq; Rationali D, ſumatur ei longitudine cõmenſurabilis G F, eritque G F, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratũ ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius libri. Dico E G eſſe ſecundam Apotomen. Quoniam *b* enim quadrata ex G F, E F, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ G F, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo G F, ſit oſtenſa Rationalis: erit quoque E F, Rationalis. Quia vero numeri A C, A B, atque adeo & quadrata ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati: *c* erunt G F, E F, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt G F, E F, potentia ſolum commenſurabiles; *d* Ideoque E G, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſſit enim recta E F, plus quam G F, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt vt A C, ad A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF: Oſtendemus iam vt in antecedenti propoſ. rectam H, ipſi E F, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cum tota E F, plus poſſit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine cõmenſurabilis, ſitque congruens G F, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis: erit E G, ex defin. ſecunda Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum. *b 6. decimi.* *c 9. decimi.* *d 71. decimi.*



PROBL. 21. PROPOS. 88. 87. 82.

INVENIRE tertiam Apotomen.

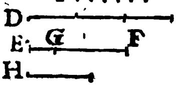
REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propoſitione 86. ſumatur alius numerus I, vt in propoſitione 31. huius libri docuimus, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſitâ deinde Rationali D, fiat vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum

a 6. *decimi.* tum ex E F, per coroll. propoſ. 6. huius libri. *a* Eruntque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, commenſurabilia; atque adeo & rectæ D, & E F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; *b* erunt rectæ D, & E F, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F ex eodem corollario propoſ. 6. huius lib. Dico E G, eſſe tertiam Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo E F, oſtenſa ſit Rationalis erit & G F, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia A B, A C, atque adeo & quadrata ex E F, G F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; *d* Erunt rectæ E F, G F, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt E F, G F, potentia ſolum commenſurabiles: Ac propterea cum ex E F, auferatur G F, potentia illi ſolum commenſurabilis: *e* reliqua E G, Apotome erit Dico & tertiam eſſe. Quoniam n. eſt, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratū ex E F; & vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F: Non habent autem numeri I, & A C, proportionem, quam numeri quadrati Neq; igitur quadrata ex D, & G F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & G F, lōgitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H; Oſtendemuſque, vt in propoſ. 86, rectam H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota E F, plus poſſit quam congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ: erit ex defin. E G, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

b 9. *decimi.*
c 6. *decim.*
d 9. *decimi.*
e 74. *decim.*
f 9. *decim.*

A . . . . . C . . . . B

I . . . . . .



88.
83.

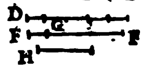
PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPARTIS duobus numeris A C, C B, ita vt A B, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib.

ius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commenſurabilis ſit E F; eritque propterea & E F, Rationalis. Quod ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, E G, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſſit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, erit per conuerſionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; a erunt rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. a 9. decimi.

A . . . . . C . . . B



Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, eſtque eadem tota EF, commenſurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

PROBL. 23. PROPOS. 90. lxxxix. lxxxiv.

Invenire quintam Apotomen.

Repertis (repetita figura proxime antecedentis propoſitionis) duobus numeris A C, C B, vt in propoſitione præcedenti fiat conſtructio, vt in propoſ. 87. hoc eſt, ſumatur G F, longitudine commenſurabilis Rationali D, &c. Oſtendemus ergo vt in propoſ. 87. E G, eſſe Apotomen. Dico & quintam eſſe. Poſſit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia ſimiliter, vt in propoſ. 86. oſtendemus, per conuerſionem rationis eſſe vt A B, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rurſus, vt in propoſ. antecedenti rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles; eſtque congruens GF, Rationali D, commenſurabilis lõgitudine: erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

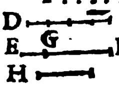
PROBL. 24. PROPOS. 91. xc. lxxxv.

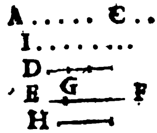
Invenire ſextam Apotomen.

Repertis tribus numeris A C, C B, & I, vt in propoſ. 54. ita vt A B, ad neutrum ipſorum A C, C B; & I, ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionẽ habeat, quã quadratus ad quadratũ: exponatur Rationalis D, & reliqua fiãt, vt in propoſ. 88. Oſtẽdemus ergo ſimiliter, vt ibi D, & EF, lõgitudine incõmenſurabiles eſſe; & E G, Apotomen eſſe. Dico & ſextam eſſe; & E G, Apotomẽ eſſe. Dico & ſextam eſſe. Nam vt in propoſ. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommenſurabiles: Atque adeo neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D;

A . . . . . C . . . . B

I . . . . . .





nali D. Poſſit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H, quam oſtendemus, vt in propoſ. 89. longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi E F. Igitur cum tota E F, plus poſſit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine ſit cõmenſurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, ſexta Apotome. Inuenimus ergo ſextã Apotomẽ. Quod erat faciendũ.

SCHOLIVM.

SED & expeditius ſex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

a 49. decim. *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. a Reperiatur prima ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abſciſſa igitur ex A C, recta C D, quæ æqualis ſit ipſi C B: Dico A D, eſſe primam Apotomen. Quoniam enim A C, C B, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles: erunt etiam A C, D C, Rationales potentia tantum commenſurabiles. b Eſt ergo A D, Apotome. Et quia*

b 74. deci.



A B, plus poteſt, quam C B; hoc eſt, quam D C, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & eſt AC, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur: erit ex definitione Apotomæ primæ, A D, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta, ſextam, ſi minora nomina ex maioribus auferamus.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

xcj.
lxxxvj. **SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotome prima: Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.**

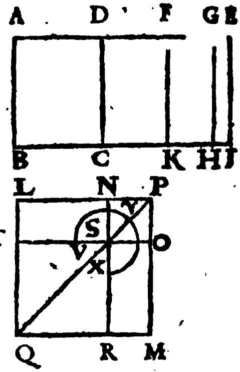
CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Apotomen eſſe. Sit i, ſi A D, congruens D E. Erunt igitur AE, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commenſurabiles: & tota A E, longitudine commenſurabilis Rationali AB: & deniq; eadem A E, tota plus poterit, quam congruens D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex D E, applicetur ad A E, rectangulum æquale ſub A G, G E, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. huius libr. Et quia AE, plus poteſt, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: c erunt rectæ A G, G E, longitudine commenſurabiles; d Ac propterea & vtraque toti A E,

c 18. decim.
d 16. decim.

longi-

longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem A E, Rationali A B, longitudine commenſurabilis. a Igitur & vtraque A G, G E, ipſi A B, longitudine eſt commenſurabilis: atque ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis G H, E I, ipſi A B, parallelis, quæ ipſi B C, productæ occurrant in H I, b erit vtrumque rectangulum A H, G I, contentum ſub duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraque D F, F E, longitudine commenſurabilis eſt ipſi D E; & D E, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali A B; (Nam ſi commenſurabilis eſſet longitudine, cum & A E, eidem A B, longitudine commenſurabilis; c eſſent A E, D E, longitudine quoque commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolum potentia commenſurabiles;) d erit etiam vtraque ipſarum D E, F E, ipſi A B, longitudine incommẽſurabilis. Et quoniam vtraq; D F, F E, Rationali D E, commenſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam A B, D F, quam A B, F E Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ducta F K, ipſi A B, parallela, e erit vtrumque rectangulum D K, F I, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium.

a 12. decimi.
b 20. dec.
c 12. decimi.
d 14. decimi.
e 22. decimi.



IAM vero ipſi A H, f fiat quadratum æquale L M, & ipſi G I, æquale fiat quadratum N O, communem habens cum L M, angulum L P M. g Erunt igitur quadrata L M, N O, circa eandem diametrum, quæ ſit P Q. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniã igitur rectangulum ſub A G, G E, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex F E, h erunt tres rectæ A G, F E, G E, proportionales; Ac propterea cum A H, F I, G I, eandem cum ipſis habeant rationem: erit F I, medium proportionale inter A H, G I, hoc eſt, inter quadrata L M, N O, illis æqualia. Eſt autem inter eadem L M, N O, per lemma propoſ. 54 huius lib. medium quoque proportionale L O. Igitur rectangula F I, L O, æqualia ſunt: k Sed ipſi F I, æquale eſt D K, & ipſi L O, æquale eſt M N. Eſt ergo totum D I, toti gnomoni V Y X, cum quadrato N O, æquale. Eſt autem & totum A I, per conſtructionem, æquale quadratis L M, N O. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato T R, eſt æquale: Ac propterea recta T S, poteſt ſpatium A C. Dico T S, Apotomen eſſe.

f 14. ſecundi.
g 26. ſexti.
h 17. ſexti.
i 11. ſext.
k 35. decimi.

QVONIAM enim ſpatia A H, G I, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt L M, N O, erunt quoque quadrata L M,

NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum: erit & LO, illi æquale Mediũ. Incommenſurabilia ergo ſunt LO. & NO, cum vnum ſit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, *a* eandem rationem habentes cum LO, NO, *b* longitudine incommenſurabiles ſunt; *c* Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

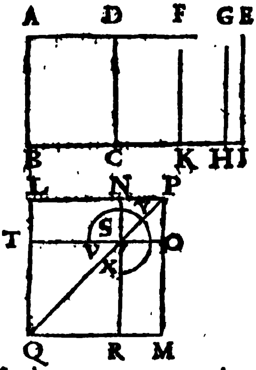
a 1. *ſex.*
b 10. *decim.*
c 74. *decim.*

THEOR. 69. PROPOS. 93.

xcII.
lxxxvij.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda: Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles: & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. *d* Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles: *e* Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AE, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commenſurabilis; *f* eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles. *g* Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AE, AG, quam AB, GE, potentia ſolum commenſurabiles: *h* Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; &



d 18. *decim.*
e 16. *decim.*
f 12. *decim.*
g 14. *decim.*
h 22. *decim.*

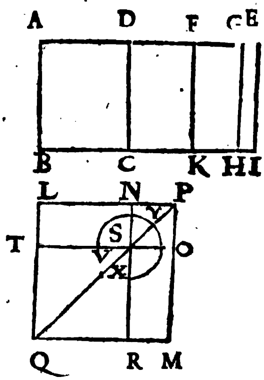
eſt; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis; erit quoq; vt in ſcholio propoſit. 12. huius lib. oſtendimus, eidem AB, Rationali longitudine commenſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. *a* Vtrumq; ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primam. a 20. *dec.*

QVONIAM enim AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles, *b* erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atq; adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, ſaltem potentia erunt cõmenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (oſtẽſa enim ſunt AH, GI, Media eſſe) Media ſint. Et quoniam FI, atque adeo ſibi æquale LO, Rationale eſt, propterea q; Medio NO, incommenſurabile; *c* erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles, erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale eſt oſtenſum; *d* erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat. b 10. *decim.* c 10. *decim.* d 75. *dec.*

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Sit enim ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, longitudine cõmenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit. quam DE, quadrato rectæ ſi longitudine commenſurabiles. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propoſ. 92. eruntque rurſus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter ſe commenſurabiles; *e* Ac propterea & vtraq; toti AE longitudine commenſurabilis erit. Eſt autem AE poſita incommenſurabilis longitudine Rationali AB *f* Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommenſurabilis. Cum ergo vtraque AG, GE Rationali AE. commenſurabilis, Rationalis ſit; erunt tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; e 16. *dec.* f 14. *dec.*



a 22. dec. rabiles; *a* Ac propterea vtrumq; rectangulum AG, GI, Medium erit. Ruſus quia DE, longitudine ponitur incōmenſurabilis Rationali AB; erit quoq; vtraq; DF, FE, ipſi DE, longitudine cōmenſurabilis exiſtens *b* eidem AB, longitudine incommenſurabilis. Cum ergo vtraq; DF, FE,
b 14. dec. Rationali DE, cōmenſurabilis ſit, Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *c* atque propterea vtrumq; rectangulum DK, FI, Mediū erit. Similiter iam demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.
c 22. dec.

QVONIAM enim AH, GI, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habent rationem, quam
d 10. decim. AG, GE, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe, *d* commenſurabilia ſunt; Erunt & quadrata LM, NO, commenſurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. At vero quia AB, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles, eſtque ipſi AB, longitudine oſtenſa commenſurabilis GE, ipſi vero DE, cōmenſurabilis eſt longitudine FE; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & GE, FE, lon-
e 10. dec. gitudine incōmenſurabiles; *e* ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, hoc eſt, illis æqualia NO, LO, incommenſurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commenſurabiles. Mediæ ergo ſunt TO, SO, potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale ſit ipſi FI, vt conſtat ex propoſ. 92. quod
f 76. dec. Medium eſſe oſtendimus; erit LO, Medium.) *f* erit TS, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

XCIV.
LXXXIX.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Minorem eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo AE,

DE, Ra-

DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. a Erunt ergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidẽ AE, plus poteſt quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulum ſub AG GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensq; figura quadrata. Et quia AE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; b erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, c erit DI, atq; adeo & eius dimidium FI; Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; d incommenſurabilia erunt AG, GI, eandem cum illi proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe minorem. a 19. dec. b 20. dec. c 22. dec. d 10. dec.

Qvoniam enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis rectarũ TO SO, Rationale. Idem quia F, Mediũ eſt oſtenſum; erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeo rectæ TO, SO, potentia incommẽſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitq; compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; e erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat. e 77. dec.

THEOR. 72. PROPOS. 69. xcv. xc.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Continеatvr ſpatium AC, (repetita figura proxime antecedente) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totũ efficit Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE Rationales potentia tantum commenſurales, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo

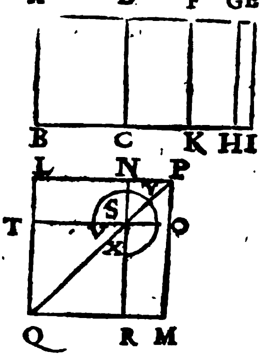
rurſus,vt in antecedenti propoſ.AG,GE, longitudine incõmenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incõmenſurabilis
a 22. dec. eſt Rationali AB, vt in propoſ 93. diximus; a erit rectangulum AI,Medium. Item quia DE,Rationalis eſt,& Rationali AB,longitudine commenſurabilis;
b 20. dec. b erit DI,atq; idcirco & eius dimidium FI,Rationale. Rurſus erunt,vt in præcedenti propoſ.AH, GI,incommenſurabilia; poteritque, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS,ſpatium AC. Dico TS,eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Qvoniam enim oſtenſum eſt AI. Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale,Medium. Item quia demonſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulum ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale,Rationale. Sunt autem & TO,SO,potentia incommenſurabiles,vt in propoſ. antecedenti eſt demõſtratum. Igitur cum TO,SO,potentia incommenſurabiles ſint,& compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis,Rationale;
c 78. dec. c erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta,&c. Quod erat demonſtrandum.

xcvj.
xcj.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.



Continеatvr ſpatium AC, ſub Rationali AB,& Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ,AE, DE, Rationales potẽtia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus, vt in propoſ.95. AG, GE,longitudine incõmenſurabiles. Et quia

tam

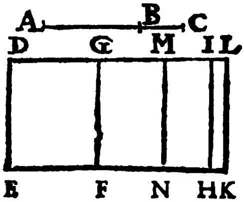
ım AE, quam DE, Rationalis eſt, & Rationali AE, longitudi-
e incommenſurabilis; *a* erit tam AI quam DI, atq; adeo & hu-
ıs dimidium FI, Medium. Eruntq; vt in propoſ. 95. AH, GI, in-
ommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt
ommenſurabiles; *b* Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis
roportionem, incommenſurabilia; Atq; adeo cum DI, FI, cō-
ıenſurabilia ſint, *c* erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam vero
emonſtrabimus, vt in propoſ. 92, rectam TS, poſſe ſpatium AC.
)ico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. a 22. dec. b 10. dec. c 14. dec.

Qvoniam enim AI, Medium oſtendimus; erit & compo-
ıtum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Me-
ium. Item quia FI, Medium oſtenſum eſt; erit & LO, illi æqua-
e, contentumq; ſub TO, SO, Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi
AI eſt incōmenſurabile, vt oſtendimus; erit quoq; LO, ſub TO,
O, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis re-
tarum TO, SO, propterea quod LO ipſi FI, & compoſitum ex
quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Denique TO,
O, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt de-
nonſtratum. Quamobrem cum TO SO, ſint potentia incom-
nenſurabiles, & cōpoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; nec
ıon & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex
quadratis ipſarum incommenſurabile; *d* erit reliqua TS, ea, quæ
cum Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur
ub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum. d 79. dec.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

Qvadratvm Apotomæ ad Rationalem applicatū, xcvij.
latitudinem facit Apotomen primam. xcij.

Sit Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint
Rationales potentia ſolum commenſurabiles; *e* & ad Rationa-
lem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrado ex AB,
latitudinem faciens DG. Dico DG,
eſſe Apotomen primam. Ad eandem
enim DE, applicetur rectangulum
DH, æquale quadrato ex AC; & ad
IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC;
ita vt totum DK, æquale ſit compo-
ſito ex quadratis rectarum AC, BC,
f Et quoniam compoſitum ex qua-
dratis rectarum AC, BC, æquale eſt e 45. primi.



rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; ſin auferā-
tur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, re-
ctangulo bis ſub AC, BC, æquale; atque adeo diuiſa GL, bifa- f 7. ſecundi.

riam in M, ductaque MN, ipſi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo ſub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales ſunt; a erunt quoque quadrata ex AC, BC, Rationalia; ideoque commenſurabilia. a Cum ergo & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipſorum ſit commenſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, b erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia AC, BC, Rationales ſunt potentia tantum cõmenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis, atque adeo & eius duplum GK, Mediũ. Quod cum applicetur ad Rationalem GF; c erit GL, Rationalis ipſi GF, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Mediũ, hoc eſt, Irrationale, incommenſurabilia ſunt: d erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles; e Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam eſſe.

a 16. dec.
b 21. dec.
c 23. dec.
d 10. dec.
e 74. dec.

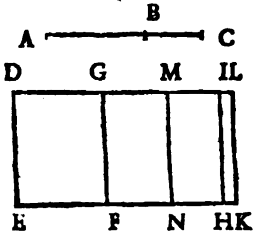
QVONIAM enim per Lemma propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC CB, hoc eſt, MK, medium eſt proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc eſt, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales ſunt. f Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex ML, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc eſt, illis æqualia DH, IK, commenſurabilia ſunt, g erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine cõmenſurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint, & ad maiorem DL, aplicatum rectangulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficienſque figura quadrata, atque ut oſtenſa DI, ipſi IL, longitudine commenſurabilis; h poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cum ſit oſtenſum DG, eſſe Apotomen, & totam DL, plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eandem totam cõmenſurabilem eſſe longitudine Rationali DE; erit ex defin DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotome ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod oſtendendum erat.

f 17. ſexti.
g 10. dec.
h 19. dec.

xcviij. THEOR. 75. PROPOS. 99.
xciij.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantquè Rationale: *a* Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen ſecundam eſſe. Conſtruantur eadem, quæ in antecedenti propoſ. ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod ſub AC, BC, continetur; ac proinde MK, ei, quod ſub AC, BC, continetur ſemel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ ſunt potentia cõmenſurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc eſt, illis æqualia, DH, IK, Media, & commenſurabilia; *b* ac proinde & totum DK, vtrique illorum commenſurabile erit. Igitur & Medium per coroll. propoſ. 14. huius libr. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, *c* erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommẽſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Rationale, ponitur, erit quoq; eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, *d* erit GL, Rationalis longitudine commenſurabilis ipſi DE. Quia vero DK, Medium, id eſt, Irrationale, & GK, Rationale, incõmenſurabilia ſunt; *e* erunt rectæ DL, GL, eandẽ habentes cum illis rationem lõgitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles; *f* Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam DL, plus poſſe, quàm congruentẽ GL, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis. Quare cum congruens GL, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome ſecunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam. Quod oſtendendum erat.



a 45. primi.
b 16. dec.
c 23. dec.
d 21 dec.
e 10. decimi.
f 74. dec.

THEOR. 76. PROPOS. 100. XCIX. XCIV.

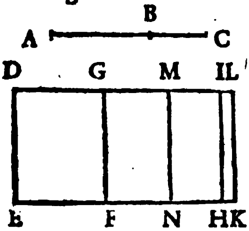
QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome ſecunda AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, contineatq; Medium: *g* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe tertiam

g 45. primi.

Apoto-

Apotomen. Eadem enim fiant, quę ſupra. Oſtendemus iam, vt in
a 23. *dec.* propoſ. præcedenti DK, Medium eſſe, *a* atq; adeo rectam DL,
Rationalem ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Et *quia*
rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt, atque ob id & eius du-
b 23. *decim.* plum GK, *b* erit quoq; GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Quia vero AB, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtq; vt AC, ad BC, ita per lemma 3 propoſ. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC,



c 10. *dec.* *c* erit quadratum ex AC, incommen-
d 16. *dec.* ſurabile rectangulo ſub AC, BC. *d* Eſt
autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. cōpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc
e 10. *dec.* eſt, ipſi GK. *e* Atq; adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incōmenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſæ & Rationes. Rationales ergo ſunt DL, GL, po-
f 74. *dec.* tentia ſolum commenſurabiles; *f* Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit commenſurab lis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.

C.
XCV.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facientesq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationales; rectangulum vero ſub
g 45. *primi.* AC, BC, Medium: *g* & ad Rationalem DE, applicetur ſpatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in pręcedentibus. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC,
h 21. *dec.* hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt; *h* erit DL, Rationalis ipſi

DE, lon-

D E, longitudine commenſurabilis. Item quia rectangulum ſub A C, B C, atque adeo & eius duplum G L, Medium eſt; *a* erit G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommẽſurabilis. Rurſus quoniam D K, Rationale, & G K, Irrationale, nempe Medium incommenſurabilia ſunt: *b* erunt D L, G L, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, potentia tantum cõmenſurabiles: *c* Ac propterea reliqua L G, Apotome eſt. Dico & quartam eſſe. Quoniam enim A C, B C, potentia ſunt incommenſurabiles: Erunt etiam quadrata, hoc eſt, ipſis æqualia, D H, I K, incommenſurabilia; *d* Ac propterea rectæ D I, I L, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo rectangulum ſub D I, I L, æquale ſit quadrato ex M L, id eſt, quartæ parti quadrati ex G L, vt in propoſ. 98. eſt demonſtratum: *e* poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis: quandoquidem ad D L, maiorem applicatum eſt rectangulum ſub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore deficiens figura quadrata, diuidenſque maiorem D L, in partes D I, I L, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota D L, plus poſſit quam congruens G L, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, ſitque eadem tota D L, Rationali D E, longitudine oſtenſa commenſurabilis: erit ex defin. D G. Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 23. decimi.
b 10. decim.
c 74. decim.
d 10. decim.
e 19. decim.

THEOR. 78. PROPOS. 102. CI. XCVI.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium: rectangulum vero ſub iiſdem A C, B C, Rationale: *f* Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen quintam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, atque adeo & illi æquale D K, Medium eſt; *g* erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Item quia rectangulum ſub A C, B C, atq; adeo & eius duplum G K, Rationale eſt; *h* erit G L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Et quia D K Medium ſeu Irrationale, & G K, Rationale, incommenſurabilia ſunt: *i* erunt D L, G L, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſura-

f 45. primi.
g 23. decim.
h 21. decim.
i 10. decim.

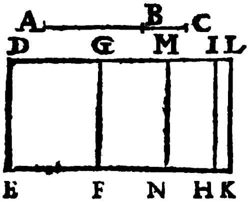
menſurabiles. Sunt autem & Rationales oſtenſæ. Rationales er-
a 74. dec. go ſunt DI, GL, potentia ſolum commenſurabiles: a Atq; idcir-
co reliqua D G, Apotome eſt. Dico & quintam eſſe. Eodem e-
nim modo, vt in antecedenti propoſ. demonſtrauimus D L, to-
tam plus poſſe quam GL, congruentem, quadrato ſibi longitudi-
ne incommenſurabilis. Quare cum congruens G L, demonſtrata
ſit longitudine commẽſurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG,
Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Me-
dium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

cij. xcvij.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipſi congruens BC, ita vt A C, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum ſub iiſdem A C, B C, Medium, incommen-
b 45. primi. ſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum. b Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato, ex A B, ſpatium æquale DF, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ſextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Quoniam igitur tam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, illi æquale D K, quam rectangulum ſub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium eſt; c Erit etiam



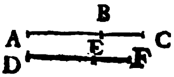
c 23. decim. D L, quam G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommẽſurabilis. Et quia rectangulum ſub A C, BC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A C, BC; Et ſunt rectangulum ſub AC, B C, & eius duplum G K, commen-
d 14. decim. ſurabilia: d Erit & G K, eidem cõpoſito, hoc eſt, ipſi D K, incom-
e 10. dec. menſurabile: e proptereaq; rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam DK GK, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, po-
f 74. decim. tentia ſolum commenſurabiles, f Atq; idcirco reliqua D G, Apotome eſt. Dico eſſe & ſextam. Oſtendemus enim ſimiliter vt propoſ. 101. totam DL, plus poſſe quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cum igitur neutra ipſarum D L, G L, commenſurabilis ſit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. D G, Apotome ſexta. Quadratum ergo eius, quæ cũ Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR.

THEOR. 80. PROPOS. 104. biij. xcviij.

Recta linea Apotomæ longitudine commenſurabilis: & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

Sit Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi AB, longitudine cõmenſurabilis DE. Dico & DE, Apotomen eſſe, atque ordine eandem ipſi AB; *a* Fiat n. vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. a 12. *ſexti.*
b Erit ergo tota AC, ad totã DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. b 12. *quinti.*
Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commenſurabiles: *c* Erunt quoq; AC, DF, nec non & BC, EF, commenſurabiles longitudine. c 10. *decimi.*
Et quia AC, BC, ſunt Rationales, erunt etiam illis commenſurabiles DF, EF, Rationales. Rurſus quia eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF: & permutãdo vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & ſunt AC, BC, potentia ſolũ commenſurabiles: erunt quoq; ex iis, quæ ad propoſ. 10. huius libri demonſtrauimus, DF, EF, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint oſtenſæ, *d* reliqua DE, Apotome eſt. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. d 74. *decimi.*
Poſſit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quo poſito, *e* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. e 15. *decimi.*



Si igitur AC, longitudine ſit cõmenſurabilis Rationali expoſitæ, vt AB, ſit Apotome prima; *f* erit quoque DF, longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, cum tam Rationalis expoſita, quam DF, eidem AC, ſit longitudine commenſurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipſi AB. Si vero BC, ſit longitudine commenſurabilis Rationali: erit eodem modo EF, Rationali lõgitudine commenſurabilis: Atq; adeo vtraque AB, DE, ex defin erit Apotome ſecunda. Si denique neutra ipſarum AC, BC, commẽſurabilis ſit longitudine expoſitæ Rationali; *g* erit quoque neutra ipſarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia. f 12. *decimi.* g 14. *decimi.*

Possit iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quo poſito, *h* poterit & DF, plus quã EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE, eſſe Apotomen quartam, quintam, vel ſextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, &c. Quod oſtendendum erat. h 15. *decimi.*

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propoſ. 67. huius libri de

lineis

lineis ex binis nominibus ſcripſimus. Nimirum ſi recta D E, commenſurabilis ſit ipſi A B, potentia tantum, eodem modo demonſtrari poſſe (ſi loco vocis: longitudine commenſurabilis: vtamur voce: potentia tantum commenſurabilis) & D E, Apotomen eſſe: At non poſſe inferri, illam eſſe ordine eandem ipſi A B. Non enim ſequitur, ſi tota A C, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſita, & D F, eidem eſſe commenſurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expoſita, & D F, eidem A C, longitudine commenſurabilis eſt: ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine. At vero D F, potentia tantum ex hypotheſi. Imo vero, ſi A B, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt D E, illi potentia tantum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim A B, prima Apotome, ſecunda, quarta vel quinta, eique congruens B C, & ſit D E, ipſi A B, potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendimus Apotomen eſſe, eique congruentem E F, & partes A B, B C, ad partes D E, E F, eandem proportionem habere cum totis A C, D F. Dico nulla ratione D E, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi A B. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam A C, tota, quam tota D F, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expoſita commenſurabilis lon-
a 12. decim. *gitudine: a atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt*
b 10. decim. *A C, & D F. Quare cum ſit vt A C, ad D F, ita A B, ad D E: b erunt quoque A B, & D E, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum ponitur enim D E, ipſi A B, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque A B, D E, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens B C, E F, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſita, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & A B, D E, inter ſe longitudine forent commenſurabiles, quod non ponitur.*

SEMPER tamen verum eſt, ſi A B, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam D E, quæ ipſi A B, potentia ſolum eſt commenſurabilis, eſſe quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit A C, plus quam B C, quadrato rectæ ſibi longitudine com-
c 15. decim. *menſurabilis. Cum ergo ſit vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, c poterit quoque D F, plus quam E F, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit D E, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi A B, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt A C, plus poſſit, quam B C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis: erit quoque D E, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi A B: quia rurſus, cum ſit vt A C, ad B C, ita*
d 15. decim. *D E, ad E F, d poterit quoque D F, plus quam E F, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit A B, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta.*

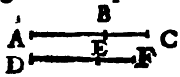
IN

In ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit D E, eadem ordine ipſi A B, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. e IV. xcix.

Recta linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine eadem.

Sit Mediæ Apotome quæcunque A B, eiqui congruens B C, ia vt A C, B C, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi A B, commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia ſiue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apromen eſſe, & ipſi A B, ordine eandem. *a* Fiat enim vt A B, ad D E, ita B, C, ad E F. *b* Erit ergo tota A C, ad totam D F, vt A B, ad D E, & vt B C, ad E F. Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque B C, E F, & A C, D F, eodem modo commenſurabiles. Et quia A C, B C, mediæ ſunt, *d* erunt quoque D F, E F, illis commenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt A C, ad D F, ita B C, ad EF; & permutando vt A C F, ad B C, ita D, ad E F: Sunt autem AC, B C, potentia ſolum commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10 huius lib. D F, E F, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum D F. E F, Mediæ ſint oſtenſæ, *e* erit reliqua D E, Mediæ Apotome. Dico & eandem eſſe ordine ipſi A B. Quoniam enim eſt vt A C, ad B C, ita D F, ad E F; & vt A C, ad B C, ita eſt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, B C, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt D F; ad E F, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F. E F; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A G B C, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F E F; Et permutando vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum ſub A C, B C, ad rectangulum ſub D F, E F. Igitur cum quadratum ex A C, commenſurabile ſit quadrato ex D F, quod rectæ A C. D F, oſtenſæ ſint commenſurabiles; *f* erit & rectangulum ſub A C, B C, rectangulo ſub D F, E F, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub A C, B C, ſit Rationale, ita vt A B, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub D F, E F, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; *g* atque adeo & D E, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum ſub A C, B C, ſit Medium, ita vt A B, ſit mediæ Apotome ſecunda; erit quoque rectangulum ſub D F, E F, ei commenſurabile, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. *h* At propterea & D E, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.



a 12. ſexti.
b 12. quinti.
c 10. decimi.
d 24. decimi.
e 75. vel 76. dec.
f ro. decimi.
g 75. decimi.
h 76. decimi.

cv.cxvj c. **THEOR. 82. PROPOS. 106.**

Recta linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

Sint Minor *A* B, ipſique congruens B C, ita vt A C, B C, potentia ſint incommenſurabiles, facienteſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; rectangulum vero ſub iiſdem *A* C, B C, Medium. Sit autem D E, ipſi *A* B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & *D* E, Minorem eſſe. Fiant enim eadem quæ ſupra, ita vt rurſus *A* B, B C, ad *D E*, E F, eandem habeant rationem, quam *A* C, ad *D* F. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. *D* F, E F, ipſis *A C*, B *C*, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Et quoniam eſt vt *A* C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt *A* C, ad B C, ita *D* F, ad E F, *a* erit vt quadratum ex *A* C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F, & componendo vt compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, ad quadratum ex B *C*, ita compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex *E* F: & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum *A* C, B *C*, ad compoſitum ex quadratis rectarum D F, *E* F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Eſt autem quadratum ex B C, commenſurabile quadrato ex *E* F, quod rectas B C, *E* F, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. *b* Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum *A* C, B C, compoſito ex quadratis rectarum D F, *E* F, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum *A* C, B *C*, ex hypotheſi, Rationale. Igitur, & compoſitum ex quadratis rectarum *D* F, *E* F, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub *A* C, B *C*, rectangulo ſub *D* F, *E* F, eſſe commenſurabile; ponitur autem rectangulū ſub *A C*, B C, Medium: Erit quoque rectangulum ſub *D* F, *E* F ex corol. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt vt *A* C, ad B *C*, ita *D* F, ad E F, ſuntque A C B C, potentia incommenſurabiles; *c* erunt etiam *D* F, *E* F, potentia incommenſurabiles. Quamobrem cum *D* F, *E* F, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum D F, *E* F, Rationale, rectangulum vero ſub iiſdem *D* F, E F, Medium; *d* erit *D* E, Minor. Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

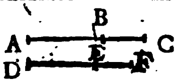
(Margin notes: a 22. *ſexti.* — b 10. *decimi.* — c 10. *ſexti.* — d 77. *decimi.*)

cvj. cxvij. 9. **THEOR. 83. PROPOS. 107.**

Recta linea commenſurabilis ei quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.

Sit

Sit recta A B, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipſi congruens B C, ita vt B C, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; at rectangulum ſub A C, B C, Rationale: Sit autem D E, ipſi A B, commenſurabilis quocunque modo. Dico & D E, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus, vt in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub A C, B C, commenſurabile eſſe rectangulo ſub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ D F, E F, potentia incommenſurabiles. Igitur cum D F, E F incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; * erit D E, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat. *78. decim.



THEOR. 84. PROPOS. 108.

cvij. cij.

Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

Sit recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint potentia incommenſurabiles, facientesq; compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium quoque & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autem D E, ipſi A B, quomodolibet commenſurabilis. Dico & D E, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus ſimiliter, vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. oſtendemus, rectangulum ſub A C, B C, commenſurabile eſſe rectangulo ſub D F, E F. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc medium, ex eodem coroll. Item vt in propoſ. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommenſurabiles. Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſt compoſitũ ex quadratis rectarum D F, E F, vt dictum eſt; rectangulo ſub A C, B C, commenſurabile rectangulum ſub D F, E F; ſunt autem compoſitum

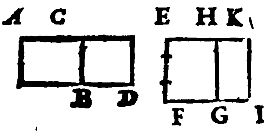
ex quadratis rectarum *A C*, *B* C, & rectangulum ſub *A C*, B C, per hypotheſin, incommenſurabilia; erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius libr. compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum ſub D F, EF, incommenſurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia ſint incommenſurabiles & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum ſub ipſis Medium;
a 79. incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis; *a* erit D
decimi. E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat oſtendendum.

cviij. ciij

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

Detrahatur á Rationali *A D*. Medium *C D*. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum *A* B, eſſe vel *A*potomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis E F. *b* ad quam applicetur re-
b 45. ctangulum E G, æquale ipſi *A B*, & ad G H, aliud H I, æquale
primi. ipſi *G D*, ita vt totum E I, toti *A D* ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali *A D*, Rationale eſt; *c* erit E K, Rationalis,
c 21. Rationali E F, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia H I,
decimi. Medio *C D*, æquale Medium eſt *d* erit H K, Rationalis, ipſi E F,
d 23. longitudine incommenſurabilis. Itaque cum E K, quidem ſit lon-
decimi. gitudine commenſurabilis ipſi E F,



at H K, eidem E F, longitudine incommenſurabilis, *e* erunt E K, H K, longitudine incommenſurabiles
e 13. Sed & Rationales. Rationales ergo
decimi. ſunt potentia tantum commenſurabiles *f* propterea que reliqua EH,
f 74. Apotome eſt, & ei congruens H K *A*ut igitur E K, plus poteſt quã
decimi. H K quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabis Si plus poteſt E K, qam H K. quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine; cum tota E K, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex deſin. E H, *A*potome prima Quare recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali & *A*potoma prima E H, hoc eſt, ſpatium *A B* ſibi æquale, *g A*potome eſt, Si vero E K, plus poteſt, quam H K.
g 92. quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; cum tota E
decimi. K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali. E F; erit ex definitione E H, *A*potome quarta. Quapropter recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & *A*potoma quarta E H, hoc

EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, *a* Minor eſt. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat. a 95. *decimi.*

THEOR. 86. PROPOS. 110. CIX. CIX.

Rationali à medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

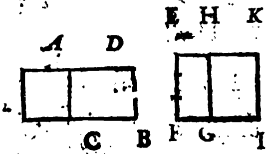
Detrahatur à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim conſtruantur quæ ſupra. Et quia EI Medio AD, æquale, Medium eſt; *b* erit EK, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; *c* erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum HK, quidem ipſi EF, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis; *d* erunt HK; EK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; *e* Ac proinde reliqua EH Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens HK, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſecunda EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, *f* Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens HK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta ex defin. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc eſt, ſpatium illi æquale AB, *g* eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem rationali à Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

b 23. *decimi.* c 21. *decimi.* d 13. *decimi.* e 74. *decimi.* f 93. *decimi.* g 96. *decimi.*

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX. CV.

Medio à Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Medium CD, quod incommenſurabile ſit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB,



poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem quæ ſupra; quoniam E I, H I, Mediis A D, C D, æqualia

a 13. decimi. Media ſunt, *a* erunt E K, H K, Rationales ipſi E F, longitudine commenſurabiles. Et quia A D, C D,

b 10. decimi. hoc eſt, E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; *b* erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potētia tantum commenſurabiles; *c* Ac propterea reliqua F H Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, q̃ H K quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale; *d* Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si vero E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, ſit longitudine commēſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſexta. Quamobrem recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, *e* eſt ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

c 74. decimi.

d 94. decimi.

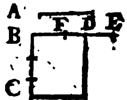
e 97. decimi.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

cxj. cvj.

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita autem Rationali B C, *f* applicetur ad B C, rectangulum C D, æquale quadrato ex A Quoniam igitur A, Apotome ſt: *g* erit latitudo B D, Apotome prima. Sit ergo ei congruens D E Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ B E, D E, Rationales potentia tantum commenſurabiles, poteritq; B E, plus quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & ipſa B E, Rationali B C, commenſurabilis erit longitudine, Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus: *h* erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomen B F, Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nomi-



f 45. primi.

g 98. decimi.

h 61. decimi.

nibus

nibus prima eſt, B F, F D, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa B F, Rationali B C, longitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine ſit commenſurabilis eidem B C; *a* erunt quoque B E B F, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, ſit longitudine commenſurabilis parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis ſit, & F E, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, F E, longitudine commenſurabilium, ipſa B F, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi D E; (quod B E, D E, Rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles) *b* erit quoque altera F E, eidem D E, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, D E, Rationalis eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt F E, D E, potentia ſolum commenſurabiles. Quare reliqua F D, *c* Apotome eſt; Atque ideo irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat.

a 12. *decimi.*

b 14. *decimi.*

c 74. *decimi.*

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eſſe eaſdem.

Quadratum enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum *d* latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. d 23. *decimi.*

At quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatam, *e* latitudinem efficit Apotomen primam. e 98. *decimi.*

Et quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatam, *f* latitudinem efficit Apotomen ſecundam. f 99. *decimi.*

Quadratum vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatũ, *g* latitudinem efficit Apotomen tertiam. g 110. *decimi.*

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem efficit Apotomen quartam. h 101. *decimi.*

At vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem efficit Apotomen quintam. i 102. *decimi.*

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *k* latitudinem efficit Apotomen ſextam. k 103. *decimi.*

Itaque cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe: à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales: inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam cõſequentes, & à Media, & inter ſe differre.

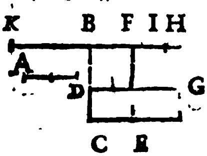
Quoniam vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, qui ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinq; Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam. At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipſam ſequuntur,

ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, ſecundam, tertiam; quartam, quintam, ac ſextam; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ poſt ipſam eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium: quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quę ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quamobrem cum & tam illæ, quam hæ à media differant: efficitur, Rationali quapiam expoſita, tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus: Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus cuius ſex ſunt ſpecies inuentę.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

cxij. THEOR. 89. PROPOS. 113.

9. Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quę eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



a 45. primi.

Sit rationalis A, & ex binis nominibus CB, cuius maius nomen CB, a & ad BC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BF. Dico BF, eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione, & adhuc Apotomen BF, eſſe ordine eandem ipſi BC, ex binis

binis

binis nominibus. *a* Applicetur enim rurſus ad D C, minus no- men, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; ſitque ipſi D G, æqualis L H. Et quoniam æqualia ſunt B E, C G, *b* erit vt B C, ad D C, ita D G. hoc eſt, ſibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D, ad D C, ita H F, ad F B: Eſt autem B D, maior quam D C. Igitur & I F, maior eſt quam F B. Ponatur F I, ipſi F B, æqualis; *c* & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc eſt, ad ſibi æqualem B F, ita F K, ad B K. Oſtenſum eſt autem eſſe vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cum ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles. *d* Igitur & F K, B K, potentia ſolum commenſurabiles ſunt.

a 45. *primi.* *b* 14. *vel* 16. *ſexti.* *c* 12. *ſexti.* *d* 10. *decimi.*

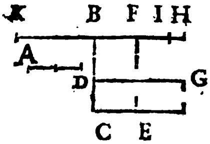
Rurſus quia eſt vt H F, ad B F, ad F K, ad B K, *e* erunt quoque H F, F K, antecedentes ſimul, nempe tota H K, ad B F, & B K, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam F K, vt F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis eſt inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, ſecunda. Quia vero C G, cum Rationale ſit, (eſt enim quadrato rationalis A, æquale) ad Rationalem D C, applicatum *f* facit D G, latitudinem Rationalem ipſi D C, longitudine commenſurabilem; Erit quoque H B, ipſi L G, æqualis, Rationalis & longitudine commenſurabilis ipſi D C. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K, ad F K. *g* Igitur vt quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, commenſurabile eſt quadrato ex D C. (quod rectæ B D, D C, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cum ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus.) *h* Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K, ad quadratum ex F K; ita recta H K, ad B K. *i* Igitur longitudine commenſurabilis eſt H K, ipſi B K; atque adeo reliquæ B H, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem B H, Rationalis. Igitur & H K, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & B K, ipſi H K, commenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cum ergo oſtenſa F K, ipſi B K, potentia ſolum commenſurabilis, erit quoque F K, Rationalis. Quare cum F K, B K, Rationales ſint, & potentia tantum oſtenſæ commenſurabiles; *k* erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod eſt primum.

e 12. *quinti.* *f* 21. *decimi.* *g* 22. *ſexti.* *h* 10. *decimi.* *i* 10. *decimi.* *k* 74. *decimi.*

QVONIAM vero oſtenſum eſt, eſſe rectam H K, totam parti B K, longitudine commenſurabilem, *l* erunt propterea & *l* 16. *dec.*

B K, B H, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo B H, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi D C; erit quoq; B K, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem D C, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe vt B D, ad C D, ita F K, ad B K; & permutando vt B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modo D C, B K, oſtenſæ longitudine commenſurabiles; a Erunt quoque B D, F K, commenſurabiles longitudine. Itaque cum F K, ipſi B D, & B K, ipſi D C, longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipſius B C, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

a 10. decimi.



Item quia demõſtrauimus eſſe vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; erũt idcirco Apotomæ nomina F K, B K. in eadem ratione cum B D, D C, nominib. ipſius B C, quæ eſt ex binis nominib. Quod eſt tertium.

Poſtremo vel B D, plus poteſt, quam D C, quadrato rectę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt B D, quã D C, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; b poterit quoq; F K, plus quam B K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: Et ſi B D, plus poteſt quam D C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit & F K, plus quam B K, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis. Et ſi quidem B D, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis; erit & F K, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi B D, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demõſtrauimus. Si uer D C, ſit Rationali commenſurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine cõmenſurabilis. Si deniq; neutra ipſarũ B D, D C, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; c erit quoque neutra ipſarum F K, B K, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome B F, ipſi B C, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertiis. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 15. decimi.

c 14. decimi.

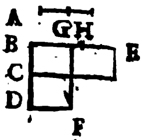
ex iij. e.

THEOR. 39. PROPOS. 114.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & ad adhuc, quæ ex binis nominib. fit, eundem habet ordinem, quẽ ipſa Apotome.

Sit Ra-

Sit Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, a & ad a 45.
B G, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudi- primi.
nem faciens B E. Dico B E, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina
commenſurabilia ſunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in
eadem proportione; & adhuc ipſam B E, ex binis nominibus, eſſe ipſi B C, Apotomę ordine eandē. b Applicetur enim ruiſus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale, eidem quadrato ex A, h. e. ipſi C E, latitudinem faciens B G. Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt; c erit vt B E, ad B G, ita B D, ad



b 45. primi. c 14. vel 16. ſexti.

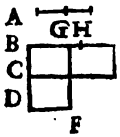
B C; & per conuerſionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoq; E G, ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in ſchol. propoſ. 10. lib. 6. conſcripſimus; vt ſit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur eſt vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam, erit quoq; B H, reliqua ipſius B E, ad H E, reliquam ipſius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoque vt B H, ad H E, ita E H ad G H; atque adeo H E, media proportionalis eſt inter B G, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, ſecunda, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc eſt, B H, ad H E: & ſunt B D, C D, cum ſint nomina Apotomę B C, Rationales potētia tantum cōmenſurabiles, d Erunt quoq; B H, H E, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commenſurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandē habent rationem cum quadratis ex B H, H E, vt demonſtrauimus, e longitudine ſunt commenſurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H, commenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. At vero cum B D, Rationalis ſit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; f erit latitudo B G, Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi B D. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commenſurabilis eſt longitudine, atq; adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem B H, B G, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero B H, H E, oſtenſę ſunt commenſurabiles potentia tantum, & B H, Rationalis; erit quoque H E, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt B H, H E, potentia ſolum commenſurabiles: g Ac propterea B E, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.

d 30. decimi. e 10. decimi. f 21. decimi. g 37. decimi.

Quoniam vero oſtendimus eſſe B H, ad H E, vt B D, ad C D, atque adeo permutando B H, ad B D, vt H E, ad C D; Oſtenſa eſt autem B H, ipſi B D, longitudine commenſurabilis; h erit quo- h 10.
que decimi.

que H E, ipſi C D, commenſurabilis longitudine. Quare B H, H E, nomina ipſius B E, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus B D, C D, Apotomæ B C. Quod eſt ſecundum.

Immo & in eadem proportione, cum demõſtratum ſit eſſe B H, ad H E, vt B D, ad C D. Quod eſt tertium.



Poſtremo vel B D, plus poteſt quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ
a 15. decimi. ſibi longitudine commenſurabilis, *a* poterit quoque B H, plus quam H E, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi B D, plus poteſt, quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam B H plus quam H E, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem B D, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoq; E H, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi B D, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero C D, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione, H E, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum B D, C D, commenſurabilis ſit longitudine
b 14. decimi. Rationali expoſitæ; *b* erit quoque neutra ipſarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis atque tertiis definitionibus, ipſa B E, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ B C. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

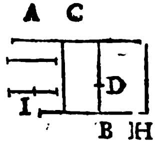
cxlv.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

Si ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

Contineatur ſpatium A B, ſub Apotoma A C, & ſub C B, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commenſurabilia ſint nominibus C E, A E, Apotomæ A C; & in eadem ratione, nempe C D, ad D B, vt C E, ad A E. Poſſit autem recta F, ſpatium A B. Dico
c 45. F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, *c* applicetur ad
primi. C B, quæ ex binis nominibus rectangulum C H, æquale quadrato ex G,

ex G a Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI BI, longitudine commenſurabilia E ſunt nominibus C D, D B, & in eadem ratio F ne, nimirum H I, ad B I, vt C D, ad D B; atq; a- G deo vt CE, AE, & permutãdo vt tota H I, ad totam C E, ita ablata B I, ad ablatam A E, b Erit ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, vt tota H I, ad totam C E; c Commenſurabilis autem eſt longitudine H I, ipſi C E, quod vtraque H I, C E, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi C D. d Igitur & B H, ipſi A C, Longitudine eſt commenſurabilis, e Atque idcirco & H C, ipſi B A, commenſurabile erit, f cum ſit vt H B, ad A C, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale Rationale eſt. Igitur & B A, illi commenſurabile, Rationale erit, propterea que & recta F, ipſum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis: Quod erat demonſtrandum.



a 113. decim.
b 19. quint.
c 12. decim.
d 10. decim.
e 10. decim.
f 1. ſext.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, fieri, poſſe vt ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus. Nam ſpatium A B, contentum ſub A C, C E, Apotama, & ex binis nominibus, quæ Irrationales ſunt, oſtenſum eſt Rationale eſſe.

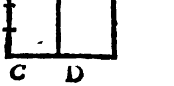
SCHOLIVM.

In proximis autem tribus propoſitionibus intelligenda ſunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commenſurabilia eſſe longitudine In prioribus enim duabus, longitudine oſtenſa ſunt eſſe commenſurabilia; In poſteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, ſi nomina C D, D B nominibus C E, A E, potentia tantum commenſurabilia ponantur. Id quod facile ex demonſtrationibus harum trium propoſitionum, paret.

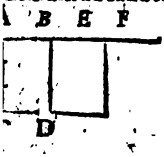
THEOR. 92. PROPOS. 116. c:xv. c:vij.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.

Sit Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius libr. Expoſita enim Rationali A C, contineatur ſub A B, Media, & Rationali A C, ſpatium A D. Eſt ergo A D, ſpatium ſub Rationali A C, & Irrationali A B, conten-



entum, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſſit ipſum recta B E, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico B E, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat Rationalem ipſi A C, longitudine incommenſurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſtat ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103 huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



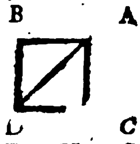
Quod ſi compleatur rectangulum D E; erit & hoc contentum ſub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propoſ. 38. Poſſit ergo ipſum recta E F, quæ ex defin. 11 Irrationalis erit. Dico rurſus E F, non eſſe eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi B E. Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratum ipſius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes à B E, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

Propoſitum ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

Sit quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri A B. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; ac propterea A C, A B, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G; ſintque numeri E F, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt A C, ad A B, ita numerus E F, ad numerum G, Erit quoq; vt qua-

dratum ex A C, ad quadratum ex A B, ita quadratus numerus ex
E F, ad quadratum numerum ex G. a (Cum enim quadrata ha- a 20.
beant ſuorum laterum proportionem duplicatam; latera autem ſext. &
æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum 11. octa-
æquales etiam, cum ſint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ui
ex A C, duplum eſt quadrati ex A B, per ea, quæ in ſcholio pro-
poſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex E F, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex E F, cum dimidium habeat, atque adeo bifariam poſſit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe E F, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſeipſum multiplicans produceret illum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; eo quod impar imparem multiplicans imparem b procreat. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia vero E F, & G, in ſua proportione minimi, c inter ſe primi ſunt; & E F, oſtenſus eſt par; erit G, impar.



E . . . H . . . F b 29. noni.

G - - - -

c 24. ſeptimi.

Si enim par eſſet, metiretur vtrumque E F, & G, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus E F, bifariam in H. Quia igitur numerus E F, duplus eſt numeri E H, d & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex E F, quadruplus quadrati ex E H (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1) Itaque cum quadratus ex E F, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qualium partium 4. eſt quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero E F, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter A C, lateri A B, Igitur incommenſurabilis longitudine. d 11. octa.

Aliter. Sit ſi poteſt fieri, diameter A C, commenſurabilis longitudine lateri A B; habeantque A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum quadrati ex A B; ſit autem vt quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit atque quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus, quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex E F, du-

plus

duplus eſt quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex E F, a ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, ſeipſum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter A C, longitudine lateri A B. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

a 14. octaui.

A B



D C

E...H..E

G.----

SCHOLIVM.

Sed & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo Quoniam ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrata à nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2 ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. & c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunq; numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. & c, b ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnũ intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non ſit, erunt ſolum hi numeri 4. 16. 64 quadrati; reliqui verò 2. 8 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratũ, (c alias & 2. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. d Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum.

b 10. octaui.

c 24. octaui.

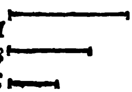
d 9. decimi.

Hoc etiam theorema aliter demonſtrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8 lib 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex ſequentib. Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti poſſet Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſurabilitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinens: viſum eſt eam paucis explicare, aſſignando more noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & alia quamplurima magnitudines, plana ſcilicet, atque ſolide incõmenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A C, longitudine inter ſe incommẽſurabiles, inter quas media proportionalis ſit B.

A



B

C

Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad C, ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem

milem, ſimiliterq́ʒ poſitam ſuper B, & ſunt A, & C, longitudine incommenſurabiles; a erunt rectilinea illa figura ſuper A, & B, incommenſurabiles. a 10. decimi.

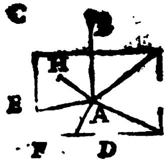
Rurſus b quoniam circuli, quorum diametri A B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B deſcripta: Quadrata autẽ hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterq́ʒ poſitæ proportionem habent, quam recta A, & C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. c Habebunt quoq; circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam rectæ A, C. Sed rectæ A, C, incommenſurabiles ſunt longitudine. d Igitur & circuli diametrorum A, B, incommenſurabiles ſunt. b 2. duodecimi. c 11. quinti. d 10. decimi.

Iam vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterq́ʒ deſcriptæ ſuper A, B, e habebunt pyramides atq; priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilinea illa figura. Quare cum rectilinea figura illa incommenſurabiles ſint, vt modo eſt demonſtratum; f incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata. e 5. 6. vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

Quod ſi coni, vel cylindri æquealti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, B, g habebunt huiuſmodi coni, & cylindri eandem proportionalem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, h Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta ſunt igitur non ſolum lineæ & ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum. g 11. duodecimi. h 10. decimi.

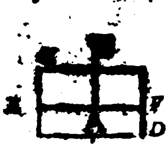
Eadem autem ratione, ſi rectæ A, & B, longitudine commenſurabiles ſint, i oſtendemus earum figuras rectilineas ſimiles, ſimiliterque deſcriptas, necnon & ipſarum circulos, commenſurabiles eſſe, i 10. decimi.
k atque adeo & earundem pyramides, & priſmata, ac deniq; k 5. 6. 7.
conos, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitu- & 11.
dinem, vt perſpicuum eſt. duodecimi.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.



G deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano CD faciet AB, cum illa lineas angulos æquales. Et propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, ut AB cum una linea ex A, in plano CD educta non efficeret angulum rectum, etiamſi cum aliis omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur AB recta ad planum CD [illegible] quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; eſt, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et è contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam, demonſtrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere.

Vt autem recta quæpiam plano cuicunq; inſiſtens rectos cõſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis; ipſamq; tangentibus, ſatis eſt, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, ipſam cum omnibus aliis rectos quoq; angulos efficere, ut perſpicuum fiet ex propoſ. 4. huius lib. D xi: cum duab. non efficientibus lineam unam, quia ſi duæ lineæ componant unã rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus aliis rectos continere angulos. Recta enim AB, inſiſtat plano CD. efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF quæ rectam unam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos conſtituere: atq; ideirco non eſſe rectam ad planum



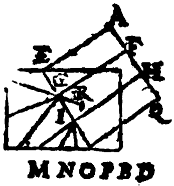
CD. Hoc autem perſpicuum eſt, cum AB circa EF, veluti axem, circumuerti queat ita ut punctũ B, modo ſit plano propinquum, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum EF, ſemper eoſdem rectos angulos & æquales conficiat. Quod ſi eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales ſunt AG, AD in priori figura, rectos conſtituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, ut diximus. Id quod dilucide demonſtrabitur propoſ. 4. huius lib.

IV.

Planum ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

... AB ... linea AG. ... ſubli-

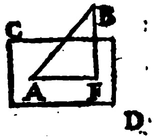
ſublimi, hoc eſt, extra planum ſubiectum CD, at EB in ipſo eodem plano. Sit autem horum planorum communis ſectio EB, quæ vt demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G I, ex ipſis in plano AB, ducantur GF IH perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL GM, IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD à punctis G, & I, ductis, dicetur planum AB ad planum CD rectum; quia hoc modo non magis in vnã partem inclinabit, quam in alterã, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim KG producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus, erit & angulus ei deinceps FGR, rectus, ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobiq; à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit lineas perpendiculares in vno eorũ ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas rectas eſſe ad reliquum planum.



V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea & adiuncta comprehenſus.

Inſiſtat recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctũ vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planũ deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritq; neceſſario angulus BAE, acutus, a cũ in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, cõprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ a 17. primi.

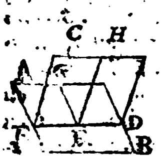


A B, ad dictum planum C D; Ita vt tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ A B, ad planum C D, quantus eſt dictus angulus acutus B A E.

VI.

Plani ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis cōtentus, quæ in vtroque plano ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

Plano namque A B, inſiſtat planum C D, ita vt pars ad C ſit in ſublimi extra planum A B. & pars ad D, in ipſo plano A B, ſitque C D, inclinatum ad A B; & communis eorum ſectio ſit D E. Si igitur ad D E, communem ſectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; F G quidem in plano A B, & F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani C D ad planum A B. ita vt tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.



Interdum Geometræ angulum C F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, ſiue is acutus ſit, ſiue rectus, obtuſuſue: quanquam propriè ſolum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum oſtendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani ſupra alind, quam inclinationem vnius ad alterum; obtuſus verò receſſum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonſtrat ſitum, ſeu eleuationem vnius plani ſupra alterum, generaliter dici conſueuit à pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum ſectionis ducuntur perpendiculares, cuiuſmodi eſt angulus G F H, ſiue is rectus ſit, ſiue acutus, ſiue obtuſus.

VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

Non obſcura eſt hæc deſinitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis receſſerit.

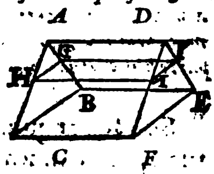
VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

Intel-

Intellige, in quamcunq; partem, etiam infinite, producantur: hoc eſt, ſiue ad dextram, ſiue ad ſiniſtram: & ſiue ſurſum ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, eandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſũ, remanentia duo plana nõ conuenient, quãuis producantur infinite ad dextrã & ad ſiniſtrã: Sed tamen quia ſurſũ protenſa coeunt, nimirũ in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam A B C D E F, *contentum duobus planis* A B E D, A C F D *cuius Baſis* B C F E, *auferaturque faſtigium* A C H D K I. *Quo facto perſpicuum eſt, reliqua plana* G B E K, H C F I *non conuenire inter ſe, ſi ad partes* G B H C, *vel ad partes* K E, I F, *producantur nec tamen idcirco parallela dicantur, cum producta ad partes* G H, K I, *conueniant in faſtigio* A D. *Vt igitur plana aliqua dicantur parallela,*



neceſſe eſt vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autem lineæ in eodẽ plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nẽpe ad ſiniſtrã, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum atq; deorſum. Itaq; duo plana quæcunq;, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandem nec ſunt parallelæ, neq; vnquam conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſita. Vide in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur, quæ nunquam conueniunt.

IX.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

Potuiſſet Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit vt breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

X.

Æquales, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribantur, ſint æqualia ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles, verum etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo huiuſmodi ſolida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorũ æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent: ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI.

Solidus angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.

Duæ lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel deniquè plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes nõ debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ AB, AC AD in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis BAD DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt AB, AC, iam non cõponetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum, ita dicos, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.



ALITER.

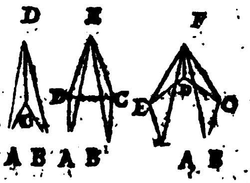
Solidus angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

Hæc definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cum enim ſaltē tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim B A D, *in plano eſt, in quo recta* A B, A D, *& angulus* D A C, *in plano, in quo recta* A D, A C; *angulus denique* C A B, *in plano, in quo recta* A C, A B, *atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum* A, *conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiam ſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbēt duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earū ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.*

Ex his vero perſpicuū cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſeſe penetrare intelligantur. Quemadmodū autē in 1. lib. Euclides ex omnib. angulis planis ſolum rectilineū aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quē plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua cōtinetur; neq; is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidē plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticē ſecetur.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.



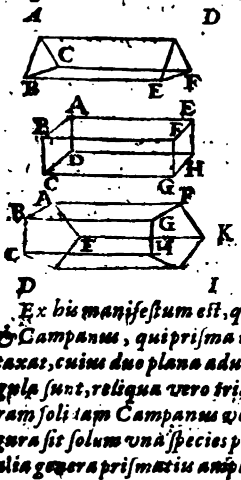
VIDELICET figuræ ſolidæ à planis A B C, A B C D, A B C D E, *ad puncta* D, E, F, *conſtitutæ appellantur pyramides. Perſpicuum autem eſt, omnia plana, quibus Pyramis continetur, eſſe triangula, cum omnia ad vnum punctum aſcendant, excepto plano, à quo omnia aſcendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitum. Hoc enim poteſt eſſe vel*

triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictũ continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin triangula ſunt ABD, ACD, BCD, Quadrangula verò ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF

XIII.

Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela, alia vero parallelogramma.

Figura ſcilicet ſolida quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia, & parallela ſunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBGF: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG dicuntur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit quam columna quadã laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes appoſitæ ſint æquales, ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triãgula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma cõtinebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vnoquoq; oppoſitorũ planorũ reperiũtur, vt figura indicat.



Ex his manifeſtum eſt, quantum hallucinentur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidã duntaxat, cuius duo plana aduerſa parallela æqualia ſimiliaq́; triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, definitio autẽ tradita infinita alia genera priſmatis amplectatur, vt conſtat; præſertim quod plurimæ demonſtrationes in hoc lib. & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus cõueniunt; perſpicuũ eſt eos hallucinari, qui vnũ tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpſerunt autem fortaſſe hi auctores occaſionem errandi quod Euclides in propoſ. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autẽ animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib. 12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorũ triangulorũ

et ſic

oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demõſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide; fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullũ aliud priſma daretur. Imo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eandem cum illa baſin habentis, altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecundum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidem, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumaſſumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum: ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circunductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes ſunt æquales; propterea, quod omnes æquales exiſtunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt centrum ſemicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiam modo.

Sphæra eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

Cicero in libro de Vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſſit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδῆς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur.

Axis

XV.

Axis autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

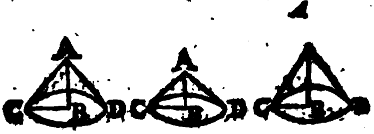
Hæ tres definitiones non egent expoſitione, dummodo hoc ſolum notetur, omnem diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrum ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

XVIII.

Conus eſt; quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumaſſumpta figura.

Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

Vt ſi triangulum rectangulum A B C, circa latus quieſcens A B, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ continetur duab. ſuperficiebus, circulari vna ac plana, quam B C, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit, & curua altera,



atque conuexa, quam latus A C, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

Quod ſi latus quieſcens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Eſt enim triangu-

latera

latera AB, BC, ponantur æqualia, a erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquivaleant uni recto, eo quod ABC, rectus eſt, erit angulus BAC, ſemirectus. Eodemq; modo angulus BAD, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quieſcens latus AB, minus fuerit circumducto BC, ut in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſiangulus; quoniam ſcilic. angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim BC, latus latere AB, ſit maius; b erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC ſemirecto maior. Similiter BAD, maior erit ſemirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quieſcens latus AB, maius fuerit circumducto BC, ut in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum enim latus AB, maius ſit latere BC, c erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo uni recto æquivaleant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, ſemirecto maior; ideoq; reliquus BAC, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulum BAD, minorem eſſe ſemirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

a 5. primi.

b 18. primi.

c 18. primi.

XIX.

Axis autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

Ut in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quieſcens AB.

XX.

Baſis vero coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

Nimirum circulus, qui deſcribitur ab altero latere rectum angulum, quale eſt BC, in ſuperioribus conis. Itaque huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

Quoniam vero Euclides ſolum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin, non autem inclinatum, cuius axis ad baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat: propterea quod in 12. lib. eadem fere demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, ut ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta linea in utramque partem producatur;

puncto, cõuertatur circa circuli circumferentiam, quoúſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemque ex duobus ſuperficiebus ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

Verticem ipſius manẽns punctum.

Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

Conum autem voco figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

Verticem coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

Axem, rectam lineam, quæ à vertice circuli centrum producitur.

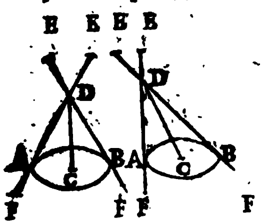
Baſim, circulum ipſum.

Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

Hæc autem omnia ita explicat Eutocius in commentariis, quos in Apollonium ſcripſit.

Sit circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaq; D B, in infinitum ex vtraq; parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur circum circuli A B, circumferentia, quouſq; punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moueri: deſcribit ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D punctum ſeſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C.

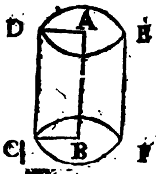


Conum vero appellat figuram contentã circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B, ſola deſcribit. Coni verticem punctum D. Axẽ D C. Baſim A B.

ſim AB, circulum. Quod ſi DC, ad circulum fuerit perpendicularis: Rectum vocat conum: Sin minus Scalenum.

XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parellelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parellelogrammum in ſeipſum rurſus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumaſſumpta figura.



Veluti ſi rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quieſcẽs AB, circumuoluatur, donec integrũ expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidẽ tribus ſuperficieb. continetur, duabus videl. planis circularibus, quas latera AD BC, deſcribunt; & altera curua, eaq; connexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

Axis autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parellelogrammum conuertitur.

Nempe recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus aduerſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

Quales ſunt circuli à lateribus AD, BC, oppoſitis deſcripti.

Euclides porro ſolum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus eſt ad vtramq; baſim, atq; de hoc ſolum in lib. 12 diſputaturus. Cum igitur nos in eadem fere theoremata, ex aliis Geometris ſimus propoſituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonſtrauit, viſum eſt prius ex Sereno Antinſenſi definire cylindrum vniuerſe, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur ſcribit Serenus ad initium primi libri de ſectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſeſe æquidiſtantes & ipſę in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & ſimul circumferatur recta linea diametrorum terminos

exca-

ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circũlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

Cylindrus eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

Cylindri baſes ſunt circuli ipſi.

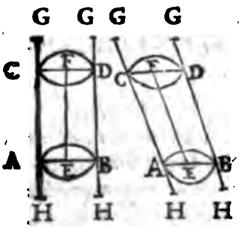
Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

Latus autem cylindri, linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes vtraſq; continget; quam & circumlatam, cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

Cylindrorum, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

Scaleni autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

Sint duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD: Iunctaq; recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtantes, vnà cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locũ reſtituantur, vnde moueri cæperunt, deſcribetur à linea AC, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipſam deſcribens in infinitũ, producitur.



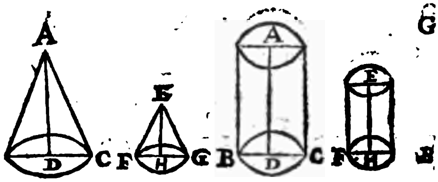
Cylindrum vero appellat figuram AB, DC circulis AB CD, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam videlicet ſola AC. deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos AB, CD, Axem, rectam EF, quæ circulorum centra cõiungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod ſi axis EF perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum; Sin minus, Scalenum.

XXIV.

Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

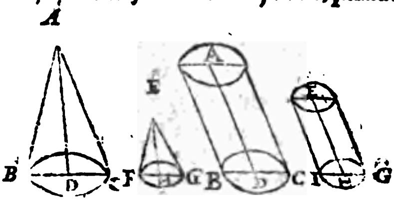
Recte Euclides ſimilitudinem conorum, atq; cylindrorum ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundum duas dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinem; Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinem ſimiles eſſe demonſtrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autem Axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaq; ſi fuerit, ut axis AD, ad axem EH, ita BC, diametri baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundū profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimēſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triāgula ADB EHF ex quorū reuolutione deſcripti ſunt coni, necnon rectangula AB EF quorū conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cū enim ſit ut AD, ad EH, ita BA, ad FG; Sit autem ut BC, ad FG, a ita dimidia BD, ad dimidiam FH: erit quoq; ut AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando ut AD, ad DB, ita EH, ad HE. Quare tam in triangulis, quā in rectangulis latera, circū æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectangula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidē, b propterea quod triāgula unum angulum uni angulo habentia æqualē, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt; c ideoq; latera omnia circa angulos æquales habēt proportionalia atq; adeo inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula vero, d eo quod reliqua duo latera duobus laterib. AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionē habent.

a 15. quinti



b 6. ſexti
c 5. ſexti
d 34. primi

Quod ſi coni vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorū axes, & diametri baſium erunt proportionales, anguliq; inclinationū quos axes efficiūt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, ut in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes ſint AD, EH, & baſium diametri BC, FG, ſimiliter & in



cylindri. Itaq; ſi fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG extiterintq; anguli inclinationum ADB FHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter ſe; dicentur & coni inter ſe, & cylindri quoq; inter ſeſe ſimiles: quoniã nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſupra diximus, & rurſus tam triangula ADB EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindrisq; demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non ſint recti.

XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Hæc ſunt quinq; corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus cõtinentur, æqualia ſint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinq; mũdi corpora, quæ ſimplicia à philoſophis nuncupãtur, nempe Cælum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram, quinq; hiſce corporibus aſſimilat, vt in ſphæra Ioannis à Sacro Boſco latius explicauimus. Horum omniũ conſtructio traditur lib. 13. Cubi quidem propoſ. 15. Tetraedri vero propoſ. 13. Octaedri deinde propoſ. 14 Dodecaedri autem propoſ. 17. Icoſaedri deniq; propoſ. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimũ eſt, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formam quis intueatur. Tradamus tamẽ propriis in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet ſo-

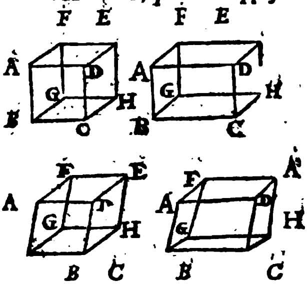
bet ſecundum eorum ſoliditatem poſſit conſicere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari poteſt, vt demonſtrabimus ad finem lib. 13.

Quoniam vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inſcriptione, circumſcriptioneque corporũ regularium; neceſſarium eſſe duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam ſit parallelepipedum, quidque ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi, vel circa eandem deſcribi.

XXX.

Parallelepipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parellelæ ſunt contenta.

Veluti ſolida figura comprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſita AC, FH, Item DF CG, Item AG, DH, ſunt parallela, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehenſa, quæ quidem plana parallela oppoſita ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallelogramma, vt demonſtrabitur prop. 24. huius lib.



Sunt autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedum illud cubus, reſpondebitque quadrato in planis figuris: Si autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte longiora, quamuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique ſex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerſo, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi,

quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel deniq; in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

Solida figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

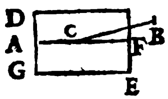
Non eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ cum interdum figura exterior plures interdũ pauciores angulos cõtineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangãt vel aliquot angulos vel aliquot latera vel deniq; aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus reliquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel deniq; à planis figuræ exterioris.

Verum duæ hæ poſtremæ definitiones p̃' animi percipiẽtur ex lib 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusq; mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1. Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

Sit enim ſi fieri poteſt, rectæ lineæ, AB, pars quidem AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exſtant, vel infra. Sit igitur in plano DE ipſi A , rectæ lineæ continua quædam recta in ea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. Quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.

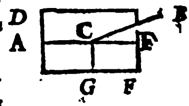


SCHOLIVM.

Hæc eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe, vt [illegible] rect[illegible] C, eſſe aliquam rectam in plano DE in directum, [illegible]. Qui enim concedit rectæ AB, partem [illegible] AC, eſſe [illegible] plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in [illegible]

DE, dari

DE, dari poſſe aliam rectam in cõtinuum, & directum, quandoquidem rectam C B, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Veruntamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrẽ ſi AC, in plano DE, producatur vſq; ad F, erit CF, recta recta AC, in continuum & directũm poſita. Verum demõſtremus



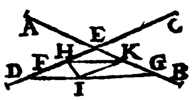
iam id ipſum Geometrice, in plano videl. DE, ipſi AC, dare poſſe aliã rectam, quæ cum ipſa vnam rectam lineã conſtituat, quamuis quis dicat AB, eſſe quoq; rectam, eiusq; partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam. a *Ducatur enim in plano DE, ipſi* a 11. *primi.*
AC, perpendicularis CG, & in eodem plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuũ & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione, b *erunt AC, & FC,* b 14. *primi.*
in directum & continuum poſita. Quamobrem etiamſi quis cõtendat AB eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodẽ plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſtituat lineam; atq; adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.

Nunc ſit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam in vno exiſtere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omnem in vno eſt plano.

Rectæ lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quidem nimirum EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra: Exiſtent quoq; rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero



HF, IF, in ſublimi, vel contra: quod fieri non poſſe, iam ſupra *c* demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe; pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, c 1. *vndecimi.*

FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur eſſe plano pars vero EHK, in ſublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH GK, in vno plano, partes autem HE, KE in ſublimi vel contra. Quæ omnia abſurda ſunt, a vt eſt demonſtratum. Quare triangulum EFG, in vno plano exiſtit; eademque eſt ratio in omni alio triangulo.

a 1. vndecimi.

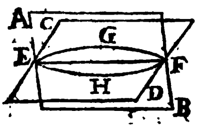
Quia vero, in quo plano eſt triangulum EFG, in eodem exiſtunt eius latera EF, EG: In quo autem ſunt rectæ EF, EG: b in eodem ſunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano in quo nimirum triangulum EFG, conſiſtere demonſtrauimus. Quocirca ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Ac triangulum omne in vno eſt plano. Quod erat demonſtrandum.

b 1. vndecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.

Secent ſe mutuo plana AB, CD, ſitque communis eorum ſectio EF; Dico EF, eſſe lineam rectam. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eoſdem habeant terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, vt in 14. pronunciato 1. lib. oſtendimus. Communis ergo ſectio EF, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat oſtendendum.



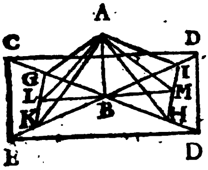
Aliter. Secent ſe rurſus plana AB, CD, ſintque termini ſectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano exiſtit, conſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rurſus duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem, cum eoſdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano eſſe credatur, tunc ſi in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum ſectio eſt.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, in

bus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angelos rectos erit.

Recta linea AB, inſiſtat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum ſectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos eſſe plano, quod per ipſas ducitur, ſeu in quo exiſtunt. Cum enim ſe mutuo ſecent in B; *a* erunt ipſæ in vno plano, quod ſit CEDF. Sumantur inter ſe æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, ſecans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Dimittantur quoq; ex A, puncto in ſublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex conſtructione ſunt æqualia; *b* & anguli quoque ipſis contenti GBK, HBI, cum ſint ad verticem B, oppoſiti, æquales. *c* Erunt baſes GK, HI, inter ſe, & anguli BGK, BIH, inter ſe quoque æquales, *a 2. vndecimi.* *b 15. pri.* *c 4. pri.*



Rurſus *d* cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppoſiti ſint, æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex conſtructione. *e* Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt. *d 15. pri.* *e 26. primi.*

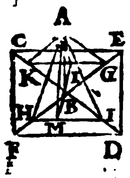
Præterea cum latera AB BG, trianguli ABG, æqualia ſint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex cōſtructione; & anguli ipſis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypotheſi, *f* erunt & baſes AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK. *f 4. pri.*

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia ſunt; & baſis AH, baſi AG, ex hactenus demonſtratis; *g* erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehenſi æquales. *g 8. pri.*

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia ſint lateribus AI IM, trianguli AIM: & anguli ipſis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonſtrauimus: *h* erunt quoque baſes AL, AM, æquales. *h 4. pri.*

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia ſunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & baſis AL, baſi AM, ex demonſtratis: *i* erunt quoq; anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehenſi, æquales; qui cū ſint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1 Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano ſubiecto ipſam tangit in B: Eademq; *i 8. pri.*





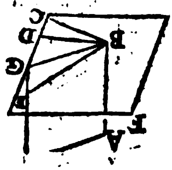
ratione oſtendetur, rectam A B, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere, etiamſi inter puncta, G I, & K H, ductæ ſint, dũmodo rectæ G I, KH, iungantur: vel certæ literæ diſponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem ſunt literæ, & tamen L M, non ducitur á ſiniſtra in dextram, vt in priori figura, ſed á ſuperiori parte verſus inferiorem. Quocirca recta AB, plano C E, D F, quod per rectas CE, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3 huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

V. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

Inſiſtat recta linea AB, tribus rectis lineis B C, B D, BE, ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi eorum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano eſſe. *a* Cum enim quælibet duæ in vno ſint plano, propterea quod productæ ad partes B, ſe mutuo ſecent in B; ſint B C, B D, in plano F C; Et ſi fieri poteſt, recta BE, non ponatur in eodem plano, ſed in ſublimi. *b* Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B, ſint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E, ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt. *c* Sit ergo eorum communis ſectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; *d* erit propterea & plano F C, per ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipſam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli A B E, A B G, exiſtentes in plano A G, per rectas A B, BE, ducto æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in vno plano F C, exiſtentibus, non erit B E, in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tri[illegible]neis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 2. undecimi.



b 2. undecimi.

c 3. undecimi.

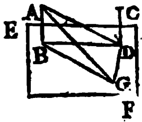
d 4. undecimi.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas eſſe parellelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoq; ipſis contenti



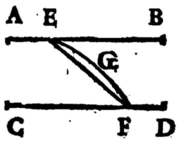
ABD, GDB; æquales, nempe recti; *a* erunt baſes æquales AD, GB. a 4 *primi.*
Rurſus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Eſt autem & baſis communis AG, *b* erunt anguli ABG, GDA, æquales: Eſt autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniã vero ex eadem defin. angulus quoq; GDC, rectus eſt; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. *c* Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano, hoc eſt, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: *d* Eſt autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, ſint recti; *e* erunt rectę AB, CD, parallelæ. Si duę itaq; rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 8. *primi.* c 3. *vndecimi.* d 2. *vndecimi.* e 20. *primi.*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ ſint parellelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quęlibet puncta: Illa linea, quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parellelis plano.

In parallelis AB, CD, ſumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parellelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra, ſecet iam aliud planum ſuperficiem parellelarum per puncta E, & F, ſitque communis ſectio horum



planorum EGF, *f* quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, f 3. *vndecimi.*
cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parellelarum AB, CD, erit recta EF, Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.

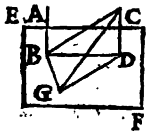
SCHOLIVM.

Hæc eadem propoſito vera eſt, etiamſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione

viij. THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint parallelæ rectæ AB CD; ſitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim BD, in plano EF, erit per defin. 3. huius lib. angulus

a 29. primi. 

CDB, rectus: *a* Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD: ponanturq; æquales BG, CD. Coniungātur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia

b 4. pri. ſunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti: *b* Erunt baſes CB, GD, æquales; Rurſus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia ſunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & baſis eſt communis CH: *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehenſi æquales, Eſt autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, ſe mutuo ſecantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB, ſecarent ſeſe in B, ob angulum CBD) ad rectos angulos

c 8. pri.

d 4. vndecimi. exiſtent: *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto; Eſt autem in hoc eodem plano recta *AB*: *e* propterea

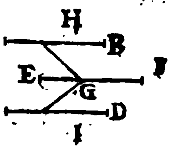
e 7. vndecimi. quod rectæ *BD*, *BC*, in eodem ſunt plano, in quo parallelæ *AB*, CD: cum puncta *B*, C, D, exiſtant in parallelis *AB*, CD. Igitur & G*B*, recta rectæ *BA*, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib.

f 4. vndecimi. Quare cum *AB* recta ſit ad rectas *B*G, *B*D; *f* erit quoque *AB*, recta ad planum per *B*G, *B*D, ductum, hoc eſt, ad planum EF. Si duæ igitur ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat oſtendendum.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano; Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

Sint rectæ *AB*, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem



in eodem cum E F, plano. Dico A B, C D, parallelas quoque eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ E F ad ipſam E F, ducantur duæ perpendiculares, G H, quidem in plano parallelarum A B, E F, at G I in plano parallelarum C, D, E F. Quoniam igitur E G, recta eſt ad duas rectas G H, G I ſe tangentes mutuo in G; *a* erit recta quoque ad planum per ipſas G H, G I, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ A B, E F, & E F, ſit recta ad planum per G H, G I, ductum; *b* erit quoque A B ad idem planum recta. Similiter cum ſint parallelæ C D, E F, ſit autem E F, recta ad planum per G H, G I, ductum *c* erit etiam C D, recta ad idem planum; *d* Atque proinde rectæ A B, C D, cum rectæ ſint ad idem planum per G H, G I, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a 4. *undecimi.*
b 8. *undecimi.*
c 8. *undecimi.*
d 8. *undecimi.*

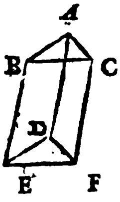
SCHOLIVM.

Data opera Euclides voluit duas rectas A B, C D, non eſſe in eodem plano cum recta E F, cui ſunt parallelæ. Nam ſi forent in eodem plano cum ipſa E F, eſſent A B, C D, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſ. 1. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ex ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

Sint rectæ A B, A C, ſe tangentes in A, parallelæ rectis D E, D F, ſe tangentibus in D; non ſint autem A B, A C, in eodem plano, in quo D E, D F. Dico angulos B A C, E D F, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim A B, D E, inter ſe æquales, & A C, D F, inter ſe; ducanturq; rectæ B C, E F, B E, A D, C F. Quoniam igitur A B, D E, parallelæ ſunt & æquales; *e* erunt quoque B E, A D, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales C F, A D. Quare cum B E, C F, parallelæ & æquales ſint eidem A D, *f* erunt etiam B E, C F, inter ſe parallelæ, & æquales; *g* Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ B C, E F. Quia ergo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſunt lateribus D E, D F, trianguli D E F, ex conſtructione, & baſis B C, baſi E F, æqualis, vt modo demonſtrauimus; *h* Erunt & anguli B A C, E D F, dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

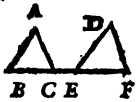


e 33. *primi.*
f 9. *undecimi.*
g 33. *primi.*
h 8. *primi.*

SCHO-

SCHOLIVM.

Concluſio huius theorematis vera etiam eſt, quando priores duæ rectæ in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC DE, DF in eodem plano, ſitque AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, eſſe æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturque rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniam igitur parallelæ ſunt AB, DE, a æquales erunt anguli ABC, DEF internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE, Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æquales ſunt duobus angulis DEF, DFE trianguli DEF. Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

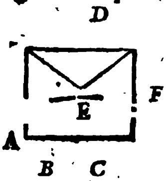


a 29. primi.

b 32. primi.

Non ſint iam BC, EF, in vna recta linea conſtitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, ſint parallelæ & æquales; c erunt & AD, BE parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidẽ AD, parallelæ exiſtentes & æquales, d inter ſe parallelæ erunt & æquales; e Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaque cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, & baſis BC, baſi EF, f erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.

c 33. primi.

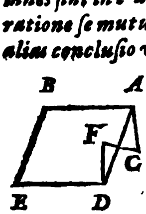


d 30. primi.

e 33. primi.

f 8. primi.

Cæterum vt concluſio huius theorematis recte ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas (ſiue omnes ſint in eodem plano ſiue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione ſe mutuo ſecent, vt ex prima & vltima figura apparet. Nã alias concluſio vera non erit.



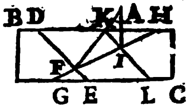
Sunt enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non ſunt æquales cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis AC, DF ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit à puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunque DE, *a* ad a 12.
quam ex A, deducatur perpendicularis AF: & in plano BC, per F, primi.
ad DE, perpendicularis ducatur GH, *b* ad quam ex A, perpendi- b 11.
cularis dimittatur AI. Dico AI, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum BC. primi.



c Ducta enim in plano BC, per I, ipſi DE, parallela KL, cum DF ad *d* rectos an- c 12.
gulos ſit duabus FA, FH, ex conſtru- primi.
ctione, *e* ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, *f* erit d 31.
quoque KI ad idem planum per FA FH, ductum recta. *g* Quo- primi.
niam vero AI, in eodem eſt cum rectis FA, FH, plano, tangitque e 4. vn-
rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA: decimi.
rectus; atque adeo AI ad rectos angulos erit duabus KI IF. *h* Igi- f 8. vn-
tur AI, ad planum BC, recta erit. A dato puncto in ſublimi, ad decimi.
ſubiectum planum perpendicularem rectã lineam diximus. Quod g 12. vn-
faciendum erat. decimi.

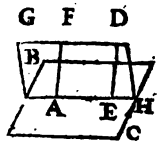
SCHOLIVM. h 4. vndecimi.

Quod ſi quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ AF ad DE, ducta perpendicularis, i erit ipſa AF, ab initio ad DE ducta perpendicularis, ad ſubiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis ſit ad vtramque DE, GH. i 4. vndecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum eſt, rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit à dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad
datum planum BC. k Ex quouis puncto D, in ſublimi dimittatur k 11. vndecimi.
ad planum BC perpendicularis DE quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E, extenſa recta per E, & A. *l* ducatur per A ipſi l 31. primi.
DE, parallela AF, in plano GH per EA, ducto. Dico AF, rectam eſſe ad planum datum BC.

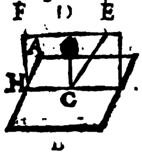


Cum enim DE AF, parallelæ ſint, & DE, recta ad planum BG, ex conſtructione: *m* erit quoque AF, ad idem planum BC, recta.
Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod m 8. vn-
faciendum erat. decimi.

THEOR.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

xiij. **Dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.**



Sit datum planum *A* B Dico à dato eius puncto C, ad eaſdẽ partes nõ poſſe educi duas perpendiculares ad planum *A* B. Ducantur enim ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum *A* B, & per C D, C E, a quæ in vno, eodemque plano ſunt, ducatur planum F G, ſecans planum A B per rectam lineam G H. Cum igitur E C, D C, rectæ ſint ad planum A B; erunt per defin. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datũ eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes. Quod erat demonſtrandum.

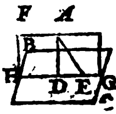
a 11. vndecimi.

*A*liter. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cum igitur duæ D C, E C, rectæ ſint ad idem planum *A* B; *b* erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

b 6. vndecimi.

SCHOLIVM.

Eodem modo à puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A



puncto in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ſi fieri poteſt duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E, c quæ in vno plano ſunt, planum F G, ſecans planum B C per rectam G H. Cum igitur A D, A E, rectæ ſint ad planum A C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D E. Quod eſt abſurdum: d *cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quomodocunque aſſumpti.*

c 1. vndecimi. d 17 primi.

Aliter. Si A D, A E, rectæ ſunt ad planum B C, ipſæ e erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.

e 6. vndecimi.

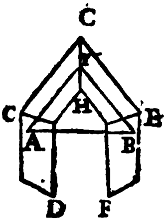
THEOR. 12. PROPOS. 14.

xiv. **AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.**

Sit recta *A* B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela eſſe plana C D, E F. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe conuenient. Conueniant ad partes C, E, e & faciant communem ſectionem rectam lineam G H; In qua ſumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I *A*, I B, in planis G C D, G E F. Quia

e 3. vndecimi.

igitur

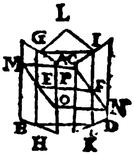


igitur AB, recta ponitur ad plana CCD, GFF, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. *a* Sed & minores duobus rectis ſunt. Quod eſt abſurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter ſe conueniunt. Parallela ergo ſunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta eſt, &c. Quod erat demonſtrandum. a 17. *primi*

SCHOLIVM.

Facile etiam demonſtrari poterit conuerſum huius, Videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnū eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.



Sint duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta ſit linea erit recta EF. Dico EF, rectā quoq; eſſe ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatq; communes ſectiones cū dictis planis rectas GH, IK, eruntq; anguli GEF, HEF, recti per defin. 3 huius lib. Ac proinde recti etiā erunt anguli IFE, KFE (Si enim alter eorum, nempe IFE dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quæ rectæ FG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atq; adeo & plana AB, CD, in quibus exiſtunt, ad eaſdem partes conuenient ad punctum L; b *cum tota recta HGL, ſit in vno plano, nempe in AB, producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo ſunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo ſi aliud planum, videlicet MN, eadem plana ſecet per EF, faciens alias rectas communes cum ipſis ſectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, ſit recta ad duas rectas IK, PN, recta* c *quoque erit EF, ad CD, per ipſas ductum. Quod eſt propoſitum.*

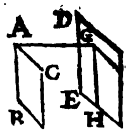
b 1. *vndecimi*
c 4. *vndecimi*

THEOR. 13. PROPOS. 15. XV.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano: Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana.

Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, ſe tangentibus in D, exiſtentibuſq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipſas ducta, eſſe parallela. Ex A, *d* enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. *e* Deinde in plano

d 11 *vndecimi*
e 31. *primi*



a 9. undecimi. b 29. primi.

plano E F, per G, ducantur G H, G I, ipſis D E, D F, parellel. Quoniam igitur rectæ A B, G I parellelæ ſunt ipſi D E; *a* erunt & A B, G H, itē eſſe parellelæ; *b* Ac proinde anguli B A G A G H, duobus rectis æquales: Eſt autem A G H, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus B A G. Simili argumento concludes, angulum C A G, rectum eſſe. Itaque cum recta G A, ſit recta duabus A B, A C, *c* recta quoque erit G A, ad planum B C, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum E F, ex conſtructione. *d* Igitur parellela ſunt plana B C E F. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 4. undecimi. d 14. undecimi.

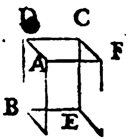
SCHOLIVM.

Quod ſi perpendicularis ex A, ad planum E F, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto quod in plano E F, non ſunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ G H, G I, ponantur parallelæ rectis A B, A C; ita vt A G, ad planum H I, per G H, G I, ductum perpendicularis, cadat in G, oſtendemus, vt prius, G A, eſſe rectam ad planum B C, per rectas A B, A C, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parellelum planum ducere.

Datum planum ſit A B, punctumq; extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano A B parallelum In plano A B, ducantur vtcunq; duæ rectæ D B, D A, ſe tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas D B D C, ducto, e agatur C E, ipſi D B, parallela. Et in plano A C, per rectas D A, D C, ducto fiat quoque C F, ipſi D A, parallela. Dico planum E F, per rectas C E, C F, ductum, parellelum eſſe plano dato A B. Cum enim duæ rectæ D B, D A, ſe tangentes in D, duabus rectis C E, C F, ſe tangentibus in C, exiſtentibuſque in alio cum illis plano parallelæ ſint, f parellelæ erunt plana A B, E F, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.



e 31. primi.

f 15. undecimi

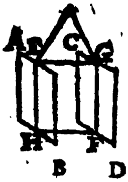
xvj.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam ſecētur: communes illorum ſectiones ſunt parellelæ.

SECENTVR plana A B, C D, parallela plano E F, per rectas E H, G F. Dico communes ſectiones eorum E H, G F, eſſe lineas

neas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe conuenient, cum ſint in plano EF, ſecante. Conueniant igitur in puncto I. a Quia ergo tota recta HEI, in vno eſt plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vno quoq; eſt plano, videlicet in CD, producto: conuenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod eſt abſurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare ſi duo plana parallela plano quopiam ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 1. vndecimi.

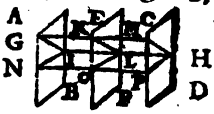
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano ſecante ſint parallelæ, vt hic demonſtratum eſt; Non tamen omnia illa plana, quorum communes ſectiones factæ ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantùm ſunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conueniant.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theoremati 30. lib. 1.

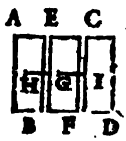
QVÆ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela eſſe. Secentur enim omnia tria plana plano GH, ſintque communes eorum ſectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rurſus alio plano NH, ſintque communes eorum ſectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana ſecantia GH, NH, ſe quoque mutuo ſecent, quorum ſectio communis ſit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, ſecantur plano GH, b *erunt communes ſectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL,* c *atque adeo parallelæ erunt inter ſe GI, MH. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe NI, PH. Itaque quum IG, IN, ſe mutuo tangentes in I, parallelæ ſint rectis HM, HP, ſe tangentibus in H, exiſtentibusque in alio plano:* d *erunt plana AB, CD, per ipſas ducta parallela. Quod eſt propoſitum.*



b 16. vndecimi.
c 9. vndecimi.
d 15. vndecimi.

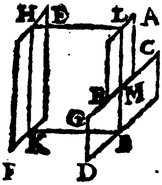
ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta eſt ad



 planum

planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, ſibi parallelum, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. demonſtrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, ſit recta ad plana a 14. vndecimi. *AB, CD; a parallela inter ſe erunt plana AB, CD. Quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter ſe, ſed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ ſunt parallelæ, ſi conueniant, vnam rectam conſtituunt lineam, veluti ad propoſ. 30. lib. 1. demonſtrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta ſecundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum conſtituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela ſunt plana AB, EF, b 16. vndecimi. *b erunt & communes ſectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quamobrem cum rectæ LM, IM, parallelæ ſint ipſi HK, exiſtantq; in eodem plano ſecante HI, & conueniant in M: ipſæ erunt in rectum & continuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propoſ. lib. 1. oſtendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient;* c 1. vndecimi. *c propterea quod recta LI, in vno iaceat plano. Quod eſt propoſitum.*



ITAQVE duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, vel certè ſi producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuerſum quoq; propoſ. 10. facile demonſtrabimus, hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallela ducti.



IN planis enim parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF, ſitque AB, ipſi DE, parallela; & AC, DF, ſint ad eaſdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque eſſe: hoc eſt, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum tranſire etiam per rectam DF: ita vt AC, DF, ſint communes ſectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. d 16. vndecimi. *d Hinc enim efficitur, ſectiones AC, DF, parallelas eſſe. quod eſt propoſitum. Si namque planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis ſectiones AC, DF, faciat ſectiones* e 16. vndecimi. *AC, DG, e quæ parallelæ erunt.* f 10. vndec. *f Igitur angulus FDG, angulo BAC, hoc eſt, angulo EDF, æqualis erit. quod eſt abſurdum, cum vnus ſit totum, & alter pars.*

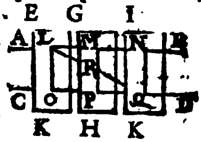
THEO-

THEOR. 15. PROPOS. 17.

XVII.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (ſiue eæ parallelæ ſint, vt in figura, ſiue non, exiſtentes tamen in eodem plano: ſiue in tranſuerſum poſitæ, in diuerſis exiſtentes planis) ſecētur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas ſecari proportionaliter, hoc eſt, ſegmenta earum inter dicta plana intercepta eſſe proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita eſſe OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur

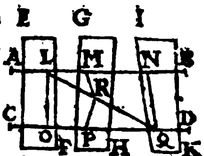


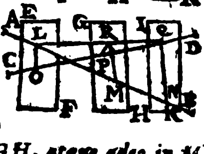
recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, a Eritque triangulum LNQ, in vno plano: ſimiliter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, ſecantur plano trianguli LNQ, b erunt communes ſectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. c Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 2. vndecimi.
b 16. vndecimi.
c 2. ſexti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi datæ rectæ AB, CD, ſint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in ſuperiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum ſecabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter ſe parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, exiſtet, cum ſit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano exiſtentia, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum ſectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, conſtituent, nimirum communem ſectionem planorum LOQN, GH.

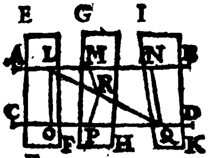


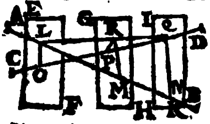


d 16. vndecimi.

Si vero duæ rectæ AB, CD, non ſint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hiſce duabus figuris apparet: quamuis e enim triangulum LOQ, ſit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuerſum eſt, (Si namque ambo illa

e 2. vndecimi.





triangula in vno eodemque plano exiſterent, eſſent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipſis conſtituitur, quod eſt contra hypotheſin.) erunt rectæ RM, RP, in diuerſis illis planis triangulorum: ac proinde vnam rectam non conſtituent; a alias in vno eſſent

a 21 vndecimi.

plano. quod eſt abſurdum.

EADEM hæc propoſitio locum habet, ſi duæ rectæ AB, CD, in eodem plano exiſtentes, non ſint parallelæ, vt in eiſdem ſubſequentibus figuris apparet: ſed tunc RMP, ſemper erit vna linea recta, vt ad initium huius ſcholij demonſtratum eſt, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonſtratio hic adhiberi poteſt.

NON ſecus ſi plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, ſecent, erunt earum partes proportionales, & communes ſectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas conſtituent, ſi rectæ AB, CD, in vno ſint plano, non rectas autem, ſi non ſunt in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum eſt.

EX demonſtratione porro perſpicuum eſt, ſi quotlibet lineæ in vno plano exiſtentes ſecentur quotuis lineis parallelis, ſegmenta illarum linearum inter parallelas eſſe proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in poſtrema figura quomodocunque in vno plano diſpoſita, quas ſecent tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad interſectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico ſegmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam ſegmenta OP, PQ. Iuncta enim recta LQ, b erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ, quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademque ratio eſt de pluribus. Vt autem rectè demonſtratio procedat in quibuſuis duabus rectis, ducenda eſt recta à primo puncto ſectionis vnius rectæ ad vltimum ſectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam eſſe rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rectæ CD. Idemque ſeruatum eſt in figuris huius propoſ. 17.

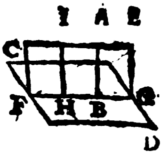
b 2. ſexti.

XVIII. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta Dico omnia plana per rectam AB, ducta, eſſe recta ad idem planum, CD. Ductum enim ſit per AB, planum EF, ſecans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, educatur in pla

c 31. pri.

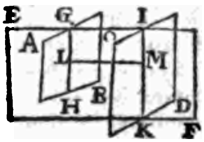


in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam
igitur AB, IH, parallelæ ſunt, & AB, ponitur
recta ad planum CD; a erit quoque IH, ad a 8. undecimi.
idem planum CD, recta: ac proinde per de-
fin. 3. huius lib. ad communem ſectionē FG,
perpendicularis. Eadem ratione omnes li-
neæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelæ, erunt ad pla-
num CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem
ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF,
ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similiq; argumento oſten-
dentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD,
eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angu-
los, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum & idem rectum.



SINT plana AB, CD, ad planum EF,
recta, facientia ſectiones GH, IK, paralle-
las. Dico ea parallela eſſe. In plano enim
EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM,
quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB,
recta erit: b *eademque perpendicularis erit* b 19.
ad IK, ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta primi.
erit. Quia igitur LM, ad vtrumq; planum AB, CD, recta eſt, c *ipſa* c 14. undecimi.
parallela erunt.

SED iam parallela ſint plana AB, CD: ſitque AB, rectum ad pla-
num EF. Dico & CD, rectum eſſe ad idem planum EF. Sint enim com-
munes ſectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; d *quæ* d 17.
parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpen- undec.
diculari LM: erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. I-
gitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta
quoque erit; e *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum* e 18. un
CD, erit rectum: ideoq; viciſſim planum CD, ad planum EF, erit quo- decimi.
que rectum. Quod eſt propoſitum.

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propoſ. opor-

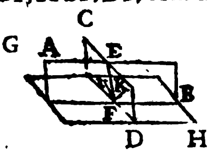
teat q; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum ſit. Ex quo- a 12. vndecimi. *uis puncto B, recta FG, a erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF.* b 18. vndec. *b quod ad planum CD, rectum erit. Quod eſt propoſitum.*

xix. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, ſe mutuo ſecantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum ſectionem EF, rectam quoque eſſe ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes ſectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta eſt, aut non. Si recta eſt EF, ad BF, DF, c recta quoque erit ad planum GH, quod per ipſas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; ſit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, ſi EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planū GH, recta ex defin. 4. huius lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem ſectionem plani CD, cum plano GH, ducaturq; in plano CD, ad planum GH, recto. Si deniq; EF, ad neutram BF, DF eſſe credatur recta; d ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FI: Item in plano CD, ad DF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoq; perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra e demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 4. vndecimi.



d 11. primi.

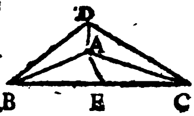
e 13. vndec.

xx. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores.

CONTINEATVR angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis

planis BAC, CAD, DAB. Dico quolibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuũ eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: ſi vero duo tantum ſint æquales, & tertius vtrouis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo maiores eſſe. Quod ſi vnus, videlicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue ęquales, ſiue inęquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque eſſe angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto *a* fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionem æquales; *b* erunt baſes BC, BE, æquales. *c* Quia vero latera DB, DC, maiora ſunt latere BC; ſi demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia ſint lateribus AE, AC, trianguli EAC: & baſis CD, maior baſe CE: *d* erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc eſt, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca ſi ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat oſtendendum.

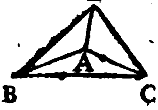


a 23. primi. *b 4. primi.* *c 20. primi.* *d 25. primi.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

OMNIS ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus ſolidus A contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores eſſe quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt conſtituti tres anguli ſolidi B, C, D, quorum quilibet ſub tribus angulis planis continetur, nempe B, ſub CBA, ABD, DBC, At C, ſub BCA, ACD, DCB: D, vero ſub CDA, ADB, BDC. *e* Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores ſunt angulo CBD: ſimiliterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD: & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt ſex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. *f* Hi autem tres æquales ſunt duobus rectis. Illi ergo ſex duobus



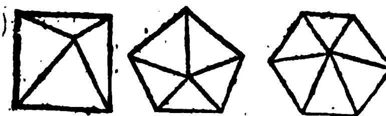
e 20. vndec. *f 22. primi.*

rectis erunt maiores. Cùm igitur ſex illi, vna cum tribus ad A, æquales ſint ſex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB; a(ſunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales)
a 32. primi. ſi auferantur ſex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, ſolidum angulum conſtituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo ſolidus angulus, &c. Quod erat demonſtrandum.

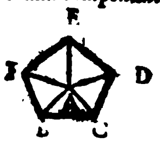
SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli conſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

SIT angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis rectæ ſubtendantur ordine in eodem plano exiſtentes; conſtituetur pyramis, cuius vertex, datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorúmve, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac



proinde totidem triangula pyramidem ambiunt. Vnde omnes anguli horum triangulorum, (b
b 32. primi. *cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum propè baſim maiores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur,*
c 20. vndec. *c & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.*



VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus ſubtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, ſecat in punctis B, C, D, E, F, ita vt conſtituatur pyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum ſolidum A.
d 32. primi. *d Quia vero omnes anguli*

quinq;

quinq; triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis BCDEF, æquales ſunt ſex rectis, nempe decem minus quatuor; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; a erunt duo CBA, ABF, qui ſunt in triangulis maiores angulo CBF, qui eſt in baſi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis: quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis. a 22. vndec.

THEOR. 20. PROPOS. 22. XXII.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales, fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.

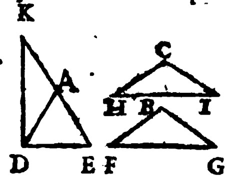
SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, *b* ex ipſis triangulum facile conficietur. *b 22. primi.*



Quod enim duæ DE, FG, maiores ſint, quam HI, ita oſtendetur. *c* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compoſitus: quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur AK, ipſi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; *d* erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia ſunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; *e* erit & baſis EK, maior baſe HI: *f* Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, *h* oſtenſa *c 23. primi.* *d 4. primi.* *e 24. primi.* *f 20. primi.*

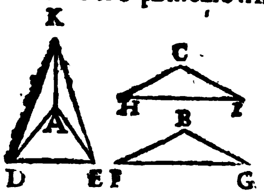
oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis

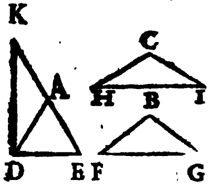


ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta
a 4. pri. KD. a Erit, igitur, vt prius, DK, ipſi FG,
b 20. primi. æqualis. b Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores ſunt recta KE; & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoq; ED, DK, maiores duabus CH, HI:
c 20. primi. c Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

CADAT poſtremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD,

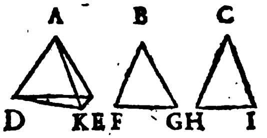


DAK, nec recta ſit EAK: quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturque rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD,
d 4 pri. KE. d Erit igitur, vt prius, KD, ipſi
e 21. primi. FG, æqualis e Quoniam vero duæ DE, DK, maiores ſunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi &



conſtructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI:
f 20. primi. f Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG, erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores eſſe, quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, ſi angulo C, ad
g 22. primi. FB, conſtituatur angulus æqualis, &c. g Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonſtrandum.

h 4. primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales: h erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius
i 4. primi. minor: i erunt quoque duæ illorum baſes æquales, k & baſis tertii
k 24. primi. vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus ſiue reliqui B,
l 24. primi. & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales; l erit quoq; baſis DE, omnium



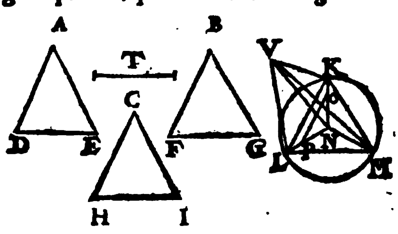
omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores eſſe recta DE. *a* Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipſi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, tranſit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, deſcripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis eſt angulo DAK, per conſtructionem: erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales: *b* erit baſis DK, baſi FG, æqualis. Rurſus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia ſunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, oſtenſus maior angulo KAE; *c* erit & baſis HI, maior baſe KE. Quare cum DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: *d* Sed DK, KE, maiores ſunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod eſt propoſitum.

a 23. primi. *b 4. primi* *c 24. primi.* *d 20. primi.*

THEOR. 3. PROPOS. 23. XXIII.

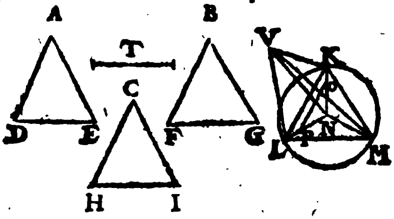
EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunq; aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo ſint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum ſolidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis ſint æquales. Ponatur ſex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; ſubtendanturq; baſes DE, FG, HI. *e* Fieri ergo poteſt, vt ex DE, FG, HI, triangulum conſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triangulũ KLM, ſitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. *f* Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum



e 22. vndec. *f 5. quarti.*

trum N, à quo ducantur rectæ NK, LN, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum eſt oxygoniũ, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. conſtat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales.

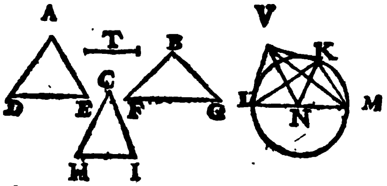


Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt laterib. NK, NL, trianguli NKL, & baſis DE, baſi KL, æqualis: a erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores ſint AD, AE, quam NK, NL, abſcindantur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur eſt vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter ſe, & conſequentia ſint inter ſe æqualia: erunt latera NK, NL, trianguli NKL, ſecta proportionaliter; b ac proinde OP, ipſi KL, parallela erit. c Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulũ. d Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Eſt autem NK, maior quam NO. e Igitur & KL, hoc eſt, DE, quæ æqualis eſt ipſi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, ſint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP, f erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior eſſe oſtendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales. Igitur maiores.

a 8. pri. — b 2. ſexti. — c 29. primi. — d 4. ſexti. — e 14. quinti — f 25. primi.

CADAT deinde centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propoſ. 5. lib. 4. manifeſtum eſt. Si igitur AD, AE, dicantur eſſe æquales ipſis NK, NL: erunt quoque

BF, BG,

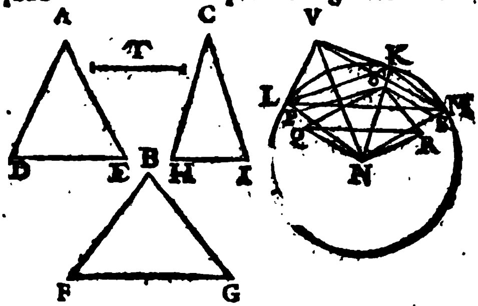


BF, BG, æquales eiſdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Poſita autẽ fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoq; ſunt rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF, BG, quam FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quam NK, NL: erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æquales ſit ipſi NM: minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, *b* cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL: ſed neque æquales: Igitur maiores.

a 20. *primi*

b 20. *primi*

CADAT poſtremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtuſus, vt ex coroll. dictæ propoſ. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicãtur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis: *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B, Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis: *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quam NK, NL: ſi abſcindantur NO, NP, ipſi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP: demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP: & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. *e* Fiat angulus ONQ, angulo A: & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales

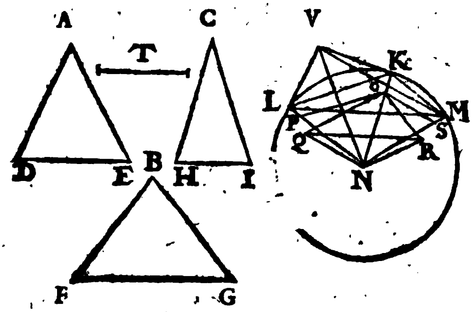


c 8. *primi*

d 8. *primi*

e 23. *primi*

ipſis



les ipſis AD, AE, & connectantur OQ, OR, cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta cum æquales ſint

a 29. primi. rectæ NO, NP, NQ. a Quare cum angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno: erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE: Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem:

b 4. pri. b erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR: & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus:

c 24. primi. c erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſunt lateribus NQ, NR,

d 25. primi. trianguli NQR: & baſis FG, maior baſe QR: d erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B, Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdū, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſūt AD, AE, quā NK, NL: ſed neq; æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat: poſſit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lem̄a propoſ. 14. lib. 10 ita vt quadra-

e 12. undec. tum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. e Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque

f 46. primi. eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM f ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit, Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtructione,

ctione, eiſdem quadratis rectarum KN, NV, æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erũt rectæ VK, AD. Rurſus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL: & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti: a erit baſis VK, æqualis baſi VL: Atq; eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt rectæ AD, & ob id) rectis AE, BF, BC, CH, CI. Quamobrem cum latera V x, VL, trianguli V xL, æqualia ſint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & baſis xL, baſi DE: b erit angulus xVL, angulo A, æqualis. Non ſecus demonſtrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum xVM, angulo C, eſſe æqualem Quare angulus ſolidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C; Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

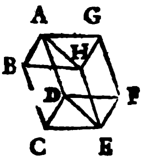
a 4. pri.

b 8. pri.

THEOR. 21. PROPOS. 24. XXIV.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramã ſimilia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, ſecentur plano AC: c Erunt communes ſectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, ſecentur plano AC: erunt communes ſectiones AD, BC, parallelæ: Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera ABCD. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ ſint rectis DC, CE, & non in eodem plano, ſed in oppoſitis: d erunt anguli ABH, DCE, æquales: eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. e Quoniam vero AB, ipſi DC, in parallelogrammo AD: & BH, ipſi CE, in parallelogrammo BE, æqualis eſt: erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE: Ac propterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de cauſa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales proportionalia: ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis iam diametris AH, DE, f cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia ſint lateribus DC, CE, trian-



c 16. vndec.

d 10. vndec.

e 34. primi.

f 34. primi.

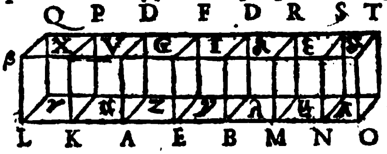
a 10. CE, trianguli DCE; a & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt
b undec. oſtenſum eſt; b erunt triangula A B H, D C E, æqualia inter ſe. c
4 pri. Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia ſint parallelogram-
c 34. morum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter ſe æqua-
primi. lia. Similiter demonſtrabimus ſimilia & æqualia eſſe parallelo-
gramma oppoſita A C, GE; & AF, BE. Si ſolidum ergo parallelis
planis contineatur, aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt,
ſimilia, & æqualia. Quod erat demonſtrandum.

THEOR 22. PROPOS. 25.

XXV.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppoſitis planis A D, B C. Dico vt eſt, baſis AG, ad baſin BG, ita eſſe ſolidum AEFD, ad ſolidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum A B C D, productum in vtramque partem quantumlibet, ſumanturq; in AB, protracta quotcunq; rectæ AK, KL, ipſi A E: & quotcunque rectæ BM, MN, N O, ipſi E B, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana, K P, L Q, MR, N S, O T, parallela planis AD, EF, BC, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur ſolidum A E F D, continetur planis parallelis ex hypotheſi, ipſum parallelepipedum erit, ex definitione,



d 24. undec. d habebitque plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda A K P D, K L Q P: E B C F, B N R C, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. e Quoniam vero parallelogramma A G, K V, L X, cum ſint ſuper æquales baſes A E, A K, K L, æqualia ſūt: & ſimilia quoq;, f cum anguli vnius ſint æquales angulis aliorū, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia & ſimilia, ſunt parallelogramma A Y, K Z, L a. Cum igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogramma A D, K P, L Q: Erunt tria plana A G, A Y, A D, ſolidi A E, F D, æqualia, & ſimilia tribus planis K V, K Z, K P, ſolidi A K P D, & tribus planis L X, L a, L Q, ſolidi K L Q P: g Sunt autem tria in vnoquoque ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodem, nempe A G, ipſi Z F: & A Y, ipſi V F: & A D, ipſi E F, &c.

e 36. primi.
f 29. primi.
g 24. undec.

Igitur

Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD. Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BH, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoq; ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi LEFQ. ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoq; ſolido maius eſt; & ſi minor, minus in quacunq; hoc ſiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinē, ita ſolidū AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis DY, ad baſin CY, & vt baſis AY, ad baſin BY, & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio accommodari etiam poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelo: erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF, ſeceturque plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur enim priſma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta vtrinq; capiantur quotcunq; rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS,



MTV, NXY, OZa; parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI, a erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi ob parallelogrammum AD: igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH; b erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogram-

a 16. vndec.

b 16. vndec.

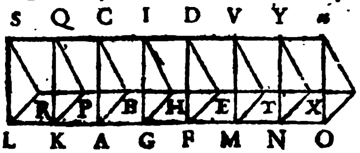
grammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammum oſtendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus GI, GH, trianguli GHI,

a 34. primi. a cum AC, ipſi GI, & AB, ipſi GH, ſit æquale: b & anguli CAB,

b 10. vndec. IGH, ſunt quoque æquales, eo quod rectæ CA, AB, parallelæ ſunt rectis IG, GH, & non in eodem plano; c Erunt triangula ABC, GHI,

c 4. pri. æqualia inter ſe, & æquiangula. d Quare latera circa æquales angulos proportionalia habebunt: Atq; idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum

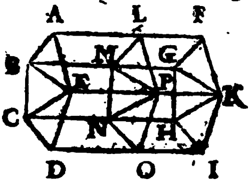
d 4. ſex. ABCIHG, contentum duobus planis oppoſitis ABC, GHI, æqualibus & ſimilibus, atq; parallelogrammis AI, IB, BG, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO, LRSIHG, OZaIHG. Quoniam vero parallelogrãma AI, KC, LQ, æqualia ſunt, & ſimilia; nec non AH, KB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana priſmatis ABCIHG, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum ABCQPK, KPQSRL.



Quare per defin. 10. huius lib. æqualia erunt priſmata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO. Quare quam multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG, & quam multiplex eſt baſis OI, baſis FI, tam multiplex erit priſma PZaIHG, priſmatis FEDIHG. Quia vero ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, primæ magnitudinis) æqualis eſt baſis OI, (multiplici eſt baſis FI, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt priſma LRSIHG, (multiplex priſmatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) priſmati OZaIHG, (multiplici priſmatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod baſibus LI, OI, exiſtentibus æqualibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia omnia plana priſmatis LRSIHG, omnibus planis priſmatis OZaIHG: Si autem baſis LI, maior eſt baſe OI, priſma quoque priſmate maius eſt, & ſi minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt baſis AI, prima magnitudo ad baſin FI, ſecundam magnitudinem, ita priſma ABCIHG, tertia magnitudo ad priſma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt eſt baſis AH, ad baſin FH, & vt baſis CH, ad baſin DH. Quod erat propoſitum.

SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, cuius oppoſita plana [illegible] polygona, nempe pentagona, ſeceturque plano LMNOP. Dico rurſus vt eſt baſis CM, ad baſin NG, ita eſſe ſolidum ABCDELMNOP, ad ſolidum LMNOPFGHIK. Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoque priſma in totidem priſmata, quæ [illegible]

ta, quorum plana oppoſita ſunt triangula, reſolutum. Quare erit vt
baſis BP, ad baſin MK, ita priſma ABEPML, ad priſma LMPKGF,
per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit vt baſis CP, ad baſin
NK, ita priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, & priſma
CDEPNO, ad priſma NOPKHI. a Vt autem BP, ad MK, & a 1. ſexti.
CP, ad NK, ita eſt recta EP, ad rectam PK, hoc eſt, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita eſt CM, ad NG. Igitur priſmata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad priſmata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter



ſe. b Vt autem vnum ad vnum, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur b 12.
erit vt priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, hoc eſt, vt baſis quinti.
CM, ad baſin NG, ita priſma ABCDELMNOP, ex tribus compoſitũ
ad priſma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod eſt propoſitum.
Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.

POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtendi demonſtratione,
qua vſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si
enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in vtramq; partem, e-
runt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe æqualia, & ſimilia, c pro- c 16.
pterea quod latera eorum ſint parallela, nempe communes ſectiones pa- undecimi
rallelorum planorum, d ac proinde angulos æquales comprehendunt, d 10.
&c. Vnde vt prius oſtendetur priſmata ex vna parte inter ſe æqualia, undecimi
necnon & priſmata ex altera parte &c.

COROLLARIVM

(EX his infertur, ſi priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis
æquidiſtante, ſectionem eſſe figuram æqualem & ſimilem planis oppoſi-
tis: Vt iam demonſtratum eſt in priori priſmate, triangulum GHI, æqua-
le eſſe & ſimile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem e-
nim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.)

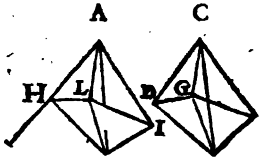
PROBL. 4. PROPOS. 26. XXVI.

AD datam rectam lineam, eiuſque punctum angu-
lum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, conſtituendus angu-
lus ſolidus æqualis angulo ſolido C, contento tribus angulis pla-
nis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano exiſtentibus. e Du- e 11.
catur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, undecimi
connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde ab-
ſcindatur AH, æqualis ipſi CD, f fiatque angulus HAI, f 23.
angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. primi.

dd 2 Rurſus

Rurſus in plano per AH, AI, ductum conſtituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto exiſtit: &
a 12. vndec. recta AL, rectæ CG, æqualis. a Ex L, vero ad planum, in quo ſunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipſi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum ſolidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem eſſe dato angulo ſolido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL: cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia ſint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales per
b 4. pri. conſtructionem: b Erunt baſes HL, DG, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales ſunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia ſint lateribus CG, CE, trianguli CGE,
c 4. pri. per conſtructionem: c æquales quoq; erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia ſunt lateribus GD, GF: & anguli HLK,
d 4. pri. DGF, recti ex defin. 3. huius lib. d erunt & baſes HK, DF, æquales.



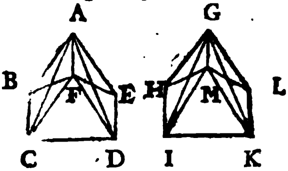
Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex conſtructione (cum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex cõſtructione, comprehendantq; angulos æquales, nimirum
e 4. pri. rectos, ex defin. 3. huius lib. e erunt baſes AK, CF, æquales) f Erunt
f 8. pri. quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti
g 4 pri. ex defin. 3. huius lib. g Erunt baſes IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF,
h 4. pri. ſint æqualia ex conſtructione: h Erunt quoq; anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus. Atque proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidũ conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemque exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramiſque quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſoli-

his ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.

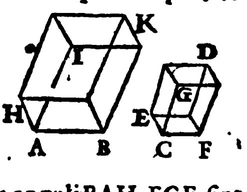
VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendendæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.



THEOR. 5. PROPOS. 27. XXVII.

A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SIT à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, *a 26.*
eiuſque punctū A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita *vndec.*
vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt eſt, CF, ad CG, *b* ſic fiat *b 12. ſexti.*
AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. Poſt hæc, perficiatur parallelepipedū AK, completis nimirū parallelogrāmis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterque poſitū. Cum enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione, erunt parallelogrāma HB, EF, ſimilia, ſimiliterque poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterque poſita parallelogrāma HI, EG, & IB, CF. Tria igitur



plana B H, H I, I B, ſolidi A K, ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita tribus planis F E, E G, G F, ſolidi C D. *a* Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi A K, ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſex planis ſolidi C D: Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſolida A K, C D. A data ergo recta linea dato ſolido parallelepipedum ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

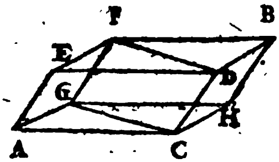
a 24. *vndec.*

XXVIII. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: biſariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIT parallelepipedum A B, in quo plana oppoſita ſint A H, E B, quorum diagonij, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ C G, D F. *b* Quoniam igitur vtraque C D, G F, parallela eſt, & æqualis ipſi A E, cum ſint parallelogramma C E, G E; *c* erunt & inter ſe parallelæ, & æquales C D, G F. *d* Ac proinde, quæ ipſas coniungunt C G, D F, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per C G, D F, ducitur, ſecare biſariam parallelepipedum A B. *e* Cum enim plana A H, E B, ſint parallelogramma æqualia, & ſimilia; erunt dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter ſe: ſunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G, F E D, D B F, proportionalia. *f* Igitur ſimilia quoq; erunt dicta triangula *g* Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale ſit & ſimile parallelogrammo C B; & A D, ipſi G B; & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, G F, priſmatis A C G F E D, æqualia ſimilia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, B G, C F, priſmatis H G C D B F: proptereaq; priſmata æqualia erunt, ex defin. 10 huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, ſectum erit parallelepipedum A B, biſariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 34. *primi.*
c 9. *vndecimi.*
d 33. *primi.*
e 24. *vndec.*
f 6. *ſexti.*
g 24. *vndec.*



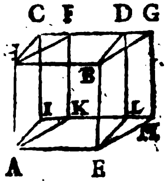
XXIX. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

SVPER baſin A B, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana

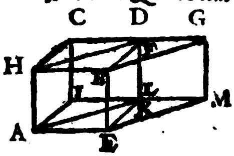
plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE. AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ADCE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia. *a* Cum enim æqualia ſint parallelogramma AL, AM, ſuper eadem baſi AE, & in eiſdem parallelis conſtituta: erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoq; inter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. *d* Rurſus parallelogrammum AC, æquale eſt & ſimile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipſi LG, cum baſes IK, LM, ſint æquales. (*f* Nam cum rectæ, IL, KM, æquales ſint ipſi AE, erunt quoq; inter ſe æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

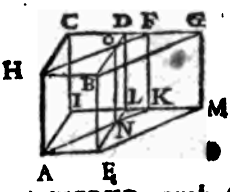
a 31. primi. *b 34. primi.* *c 4. ſexti.* *d 24. undec.* *e 36. primi.* *f 4. pri.*



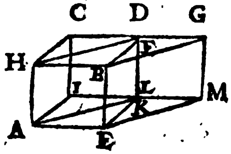
SCHOLIUM.

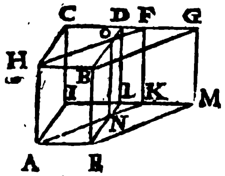
HÆC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere mediis, dummodo loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit: vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. vnde vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.





IN tertio vero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dimatur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia: quib ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIK, FCH, ELMGDB, à quibus ſi auferatur priſma commune KLNODF; (Nam communis ſectio planorum AF, DE, eſt recta NO,) remanebit ſolidum comprehenſum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale ſolido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique priſma commune AENOBH, fiunt parallelepipeda ACDE, AFGE, inter ſe æqualia.

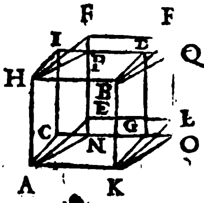




xxx. THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, nõ ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neque CI, GD, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, neque, CG, ID, productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, ALMFK, eſſe æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur, in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, ſecet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, eaſdem in punctis P, Q: adiunganturq; rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelo grammum HIDB. b Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedũ eſt APQR. c Quamobrem parallelepi-



a 34. primi.

b 33. primi.

c 29. primi.

lelepipedum AIDK, æquale eſt parallelepipedo APQK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter ſe ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propoſitio, atque præcedens, in hunc modum.

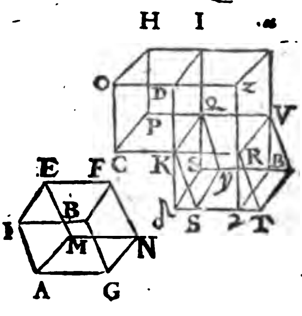
SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine.

NAM ſi vnum dicatur altius; ſi eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abſciſſum & reliquum. a Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale: æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum. *a 29. vel 30. vndecimi.*

THEOR. 26. PROPOS. 31. XXXI. XXXII.

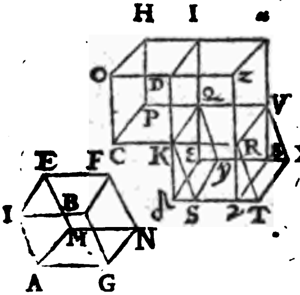
SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadem altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI ad baſin CD, perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter ſe æquales, propter eandẽ parallelepipedorũ altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, ſitq; KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipſi LA: & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogram-



gramma KT, LG, æqualia & ſimilia: Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per deſin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. *Eodem* modo cum latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem deſin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſi-
b 24. undec. milia; *a* tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, *b* tam autem illa, quã hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppo-
b 24. undec. ſitis: Erunt, per deſin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF: inter ſe æqualia.

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ: & IQ, Kγ, in ε, compleaturq; parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α: & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα.



Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, RδγV, eandem habent baſin KV, ſuntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ, Qε, VX, Vβ, collocantur in eiſdem rectis
c 19. undec. δT, εX, *c* ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V.

d 35. primi. *d* QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia ſunt inter ſe: & KT, æquale eſt ipſi LG, erit & Kγ, ipſi LG, hoc eſt, ipſi
e 7. quinti. CD, æquale: cum baſes LG, CD, ponantur æquales. *e* Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: *f* Vt autem CD, baſis ad baſin DR,
f 25. undecimi. ita eſt ſolidũ CHIK, ad ſolidum KLαR: cum parallelepipedum CHαR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis, CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita eſt ſolidum QδγV, ad ſolidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, ſecetur plano KV, oppo-
g 9. quinti. ſitis planis Dαδβ, parallelo. *g* Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, QδγV, cum eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRα, nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, Kγ, ad eandem baſin DR. Quare cum parallelepipedum QδγV, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoq; erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitũ.

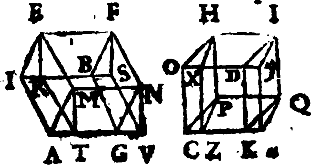
SINT iam neque inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB, neq; CP, KQ, OH, DI, ad baſin, GD, perpendiculares,

Rurſ

Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Eruntq; omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cum ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum ſint eiuſdem altitudinis, habeantq; inſiſtẽtes lineas perpendiculares, cum inter ſe æqualia, vt oſtenſum eſt. b Sed parallelepipedũ ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat baſin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemque altitudinem poſſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque oſtendetur, ſi vnius parallelepipedi inſiſtẽtes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat.

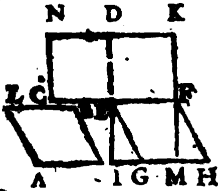
a 11. vndecimi.

b 29. vel 30. vndec.

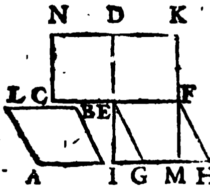


SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum ex ſolis baſibus, ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio illius, quæ noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorũ inſiſtentes lineæ ad baſes AB, CD, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L: & recta EF, rectæ LB, & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur ſuper baſes EH, IF, EK, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper AB, CD, conſtructis; ſintq; inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper EH, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia



ſint



ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem. a Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper EH, IF, cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus EF, erectam ſuper planum IK; item plana baſi oppoſita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH, atque inſiſtentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eiſdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper IF, parallelepipedo ſuper AB. b Quoniam vero parallelogramma EH, IF, æqualia ſunt; & EH, æquale eſt ipſi CD. æqualia erunt IF, CD. c Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK; d Eſt autem vt IF, ad EK, ita ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, quod ſolidum ſuper IK, ſecetur plano ſuper EF, erecto parallelo planis ſuper DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper EK, cum ſolidum ſuper CK, ſecetur plano ſuper DE, erecto parallelo planis ſuper CN, FK, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper EK. e Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper IF, & CD. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper IF, æquale parallelepipedo ſuper AB. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda ſuper AB, CD. Quod eſt propoſitum.

a 29. vndecimi.
b 35. primi.
c 7. quinti.
d 25. vndecimi.
e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin.

SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, f fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.

f 31. vndecimi.

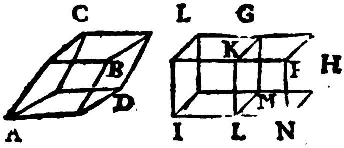
QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

XXXIII. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis ſuper baſes AB, EF. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. g Super rectam enim EK, conſtruatur parallelogram-

g 45. primi.



grammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui ſit æqualis angulo ENF. Conſtituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propoſ. lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum vnum parallelepipedum IFLH: *a* erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales baſes, per conſtructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypotheſi. *b* Quare erit vt ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ita ſolidum ABCD, ad idem ſolidum EFGH: *c* Eſt autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, vt baſis IK, hoc eſt, illi æqualis baſis AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidum ABCD, erit ad ſolidum EFGH, vt baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſũt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

a 31. vndecimi.
b 7. quinti.
c 25. vndecimi.

SCHOLIVM.

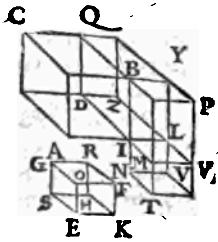
CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abſcindantur minori æqualis, & ducatur planum baſi parallelum, d erit, vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed ſic quoque erat ad totum. Abſciſſum ergo æquale eſt toti. Quod eſt abſurdum.

d 32. vndecimi.
e 9. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 33.

XXXVI.

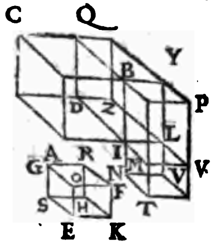
SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.



SINT ſimilia parallelepipeda ABCD, EFGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, parallelepipedum EFGH, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & ſit IL, æqualis ipſi EK, vel GR: Item DI, ad M, & ſit IM, æqualis ipſi HK, vel GO, Item BI, ad N, & ſit IN, æqualis ipſi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia ſint lateribus GR, GO: *f* & anguli contenti æquales, cum angulus

f 15. primi.

LIM, ſit æqualis angulo AID, qui ob ſimilitudinem parallelepi-pedorum æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelo-gramma IX, GF, ſimilia, & æqualia. Eadẽ ratione ſimilia erunt & æqualia LN, RS: item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, ſimilia ſunt & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: a Sunt autem tria cuiuſq; ſimi-lia & æqualia tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt, & ſi-milia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rur-ſus completis parallelogrãmis MB, BL, LM, perficiatur paralle-lepipedum MPBL: item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedũ IYQZ. Quoniam igitur ob ſi-militudinẽ parallelepipedorũ ABCD, EFGH, eſt vt AI, ad EK, hoc eſt ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt, ad IM: & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. b Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrãmum AD, ad DL: Et vt DI, ad IM, ita parallelogrãmum DL, ad LM: & vt BI, ad IN, ita parallelo-grãmum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad CL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. c Sed vt AD, baſis ad DL, baſin, ita eſt paral-lelepipedum ADCB, ad parallelepipedũ DLYQ: & vt baſis DL, ad baſin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & vt baſis BL, ad baſin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, vt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DL-YQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc eſt, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad ſecundam DLYQ, ex defin. 10 lib. 5. d Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin DL; e Et vt AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad pa-rallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis homologo-rum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter ſimilia ſolida pa-rallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonſtrandum.



a 24. undec.
b 1. ſex.
c 32. undec.
d 32. undec.
e 1. ſex.

COROLLARIVM

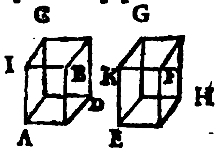
EX hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continue propor-tionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper prima deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſe-cundam. Quia tam parallelepipedũ ad parallelepipedum, vt demonſtra-tum eſt, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimi-rum laterum homologorum.

THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 34. xxxvi xxxv

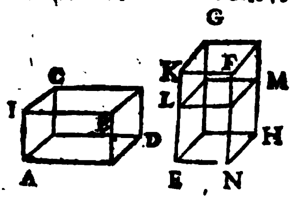
ÆQVALIVM ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales: cum & parallelepipeda æqualia ponantur: erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea quæ ad finẽ propoſ. 31. huius lib. oſtẽdimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint: ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis: & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF: *a* erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: *b* Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL. Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione baſis KM, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN: erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: *c* Sed vt KN, ad LN, ita eſt, recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualẽ. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

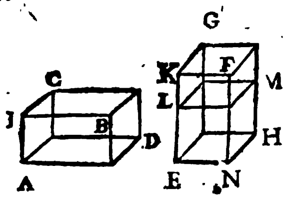
a 7. quinti
b 32. vndec.
c 1. ſext.



SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales: cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales *d*. Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

d 31. vndec.

QVOD



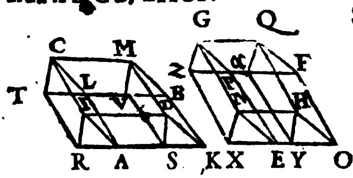
QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem: *a* Vt

a 23. vndecimi. autem baſis AD, ad baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur. *b* Et

b 1. ſexti. vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN: *c* Vt autem baſis KN, ad baſin

c 32. vndecimi. LN, ita eſt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, cum ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit vt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML: *d* ideoque æqualia erunt ſo-

d 9. quinti. lida ADCB, EHGF.



SED proponatur iam parallelepipeda BACD, EFGH, æqualia, quorũ inſiſtẽtes lineę AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, nõ ſint perpendiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autem a punctis I, D, M, C, ad planum baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Itẽ à punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico Rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita

e 29 vel 30. vndecimi. eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI. *e* Cum enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale ſolido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Constructa enim figura, vt prius; Cum ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI,

f 24. vndecimi. *f* Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin GH, ſolidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, ſint inſiſtentes

lineæ

neæ perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt vt iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, XaGH. a Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idemque oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 29. vel 30. vndecimi.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque priſmatis, quæ habẽt duo plana oppoſita triangularia, ſi prædictæ hypotheſes ſeruentur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtentia. b *Quare æqualia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.* b 29. 30. vel 31. vndecimi.

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis adijciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis. c *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt baſis ad baſin:* d *Atque adeo priſma ad priſma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.* c 32. vndecimi. d 15. quinti.

PRÆTEREA, ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, e *quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia,* f *cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.* e 33. vndecimi. f 15. quinti.

DENIQVE, ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia eiuſdem altitudinis cum priſmatis; g *Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eædem ſint, vel certe triangula earum dimidia* h *eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.* g 34. vndecimi. h 15. quinti.

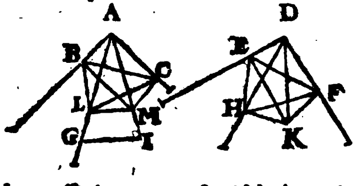
XXXVII.

THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, ſit æqualis: à ſumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, eſſe æquales inter ſe. Nam ſi AG, DH, ſunt inæquales, auferatur a maiori AG, ipſi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipſi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ ſunt GI, LM, & eſt GI, ad planum anguli BAC, recta; a erit quoque LM, ad idem planũ recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas

a 8. vndecimi.



AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. b Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; c Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus ſit ex conſtructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CM, ML,: d At quadratis rectarum CM, ML, æquale eſt quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CL; e Ac proinde angulus ACL, rectus erit. f Rurſus quia quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AM, ML: g Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale

b 48. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.
e 48. primi.
f 47 pr.
g 47 pr.

æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: *a* At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; *b* propterea que angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; *c* Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypotheſi; *d* erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales: cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; *e* erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, ſunt recti; *f* erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: *g* Quia vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint ex defin. 3. huius lib. Erunt quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; *h* erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

a 47. primi

b 48. primi

c 26. primi

d 4. primi

e 26. primi

f 4. primi

g 47. primi

h 8. primi

COROLLARIVM.

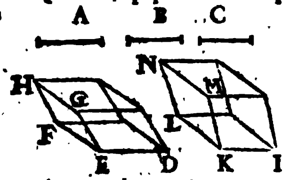
ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis

extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE. item LAC, HDF: demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.)

XXXVIII. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo; quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturq; angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A: & EF, ipſi B, & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH: quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. a Deinde ad rectam IK, eiuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG, ita vt rectæ IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: b Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales quorum verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo poſitis, ex conſtructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. præcedentis. c Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeant baſes DG, IM, æquales & æquales quoque altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 26. vndecimi.

b 14. ſexti.

c 31. vndecimi.

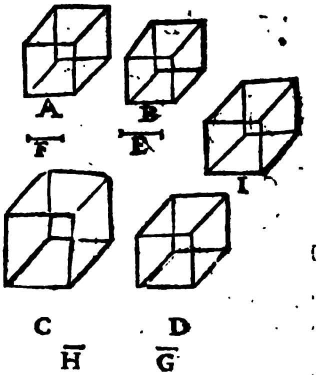
SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media linea de-

nali deſcripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, deſcriptum ex rectis A, B, C, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo I N, deſcripto a media B. Dico, tres A, B, C, eſſe continue proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex FL, demiſſæ eſſe æquales. Quare cum & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes D G, I M, æquales per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. demonſtrauimus. Quæ baſes cum angulos habeant æquales D E G, I K M, ex conſtructione: a habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, vt DE, ad IK, ita KM, ad E G. Quapropter cum DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum. a 14. ſexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. XXXIX.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D: conſtituanturq; ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterq; deſcripta: item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterq; poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia ſiue non. Dico eſſe quoq; ſolida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidũ D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſũt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur: erit ex æquo vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B, Et vt C, ad H, ita ſolidum C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.

SINT iam è contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoq; proportionales. *b* Tribus enim rectis b 12. ſexti.

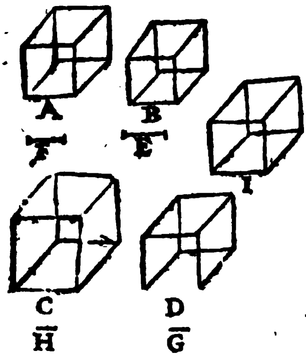
 A, B, C,

a 27. undec. A,B,C, inueniatur quarta proportionalis I, a ſuper quam deſcribatur parallelepipedum ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterq; poſitum. Quoniam igitur eſt, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I: erit quoque, vt iam eſt oſtenſum, vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Vt autem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C, ad ſolidum D. Igitur erit vt ſolidum C, ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. b Atque idcirco æqualia erunt ſolida I, & D. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & ſimilia habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandũ.

b 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectã D. Dico eſſe quoq; vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. c Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Itẽ proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidum B, & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales; quandoquidẽ triplicatæ ſunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod eſt primum. Ruſus ponatur ſecundo eſſe vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoq; vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. d Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B, Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erũt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

c 33. undecimi.



d 33. undecimi.

SCHOLIVM.

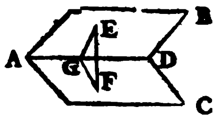
EODEM modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterq; deſcripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiuſq; ſolidum ſumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales, Igitur & quatuor ſolida proportionalia, vt demonſtra-

tum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ: perſpicuum eſt, quod proponitur.

TOTA vero hæc propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo plana aduerſa æqualia ſunt triangula, vt Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt. a Cum igitur priſmata, a 15. eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis proportionem; perſpicuum eſt, quinti. quod proponitur.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM enim AB, rectum ſit ad planum AC, ſitq; eorũ cõmunis ſectio recta AD. Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionẽ AD. Nam ſi fieri poteſt, cadat extra ad punctum F. *b* & ab F, in plano b 12.
AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque primi.
recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planũ AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3 defin. huius lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti ſunt, quod eſt abſurdum, *c* cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex c 17. pri
E, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, mi.
cadet, ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

HÆC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demiſſa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionem, d ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicula d 12.
ris EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC. Quare ex primi.
puncto E, extra planum AC, ductæ ſunt ad ipſum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

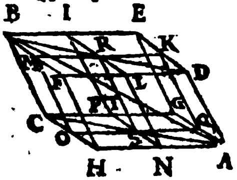
THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXI.

SI ſolidi parallelepipedi eorum; quæ ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſoli-

 di pa-

di parallelepipedi diameter, biſariam ſe mutuo ſecabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera biſariam ſecta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extenſa ſint duo plana IN, KO, quorũ ſectio communis ſit recta RS: Ducatur item diameter AB Dico rectam RS, & diametrum AB, ſe mutuo ſecare biſariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC: conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia



ſunt lateribus CO, OS, trianguli COS: (Sunt enim AQ, CO,
a 34. primi. dimidia rectarum æqualium AG, CH, a & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum ſint parallelogramma AS,
b 29. primi. HS,) b & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: c Erunt & baſes AS, CS, æquales: & anguli ASQ, CSO, æquales, d At-
c 4. primi. qui anguli ASQ, ASO, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus ſunt rectis æquales: e Ac propterea AS, CS,
d 13. primi. vnam rectam lineam conſtituent. Eodem modo oſtendentur eſſe æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam.
e 14. primi. Rurſus quia vtraque AD, BC, parallela eſt, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, f ipſæ quoque inter ſe parallelæ
f 9. undecimi. erunt & æquales. g Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ ſunt & æquales: Ac proinde ipſarum di-
g 33. primi. midiæ AS, BR, æquales ſunt. Quia vero AC, BD, parallelæ ſunt: h erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipſis plano, ideoque ſe mu-
h 7. undecimi. tuo ſecabunt, in puncto videlicet T. i Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales ſint duobus angulis BRT,
i 29. & 15. primi. BTR, trianguli BRT: & latus AS, lateri BR: k Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, ſe mutuo ſecant biſariam in T. Si igitur ſolidi paralle-
k 26. primi. lepipedi eorum quæ ex aduerſo, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

(HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo biſariam ſecare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo biſariam diuidunt, vt hic demonſtratum eſt rectam RS.)

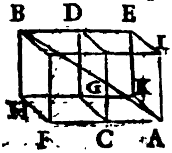
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34. primi lib. demonſtrauimus, videlicet.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum:

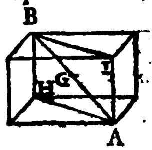
trum: biſariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur biſariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri AB, quod ſit G. Dico parallelepipedum biſariam ſecari. Sit enim primo planum CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum.

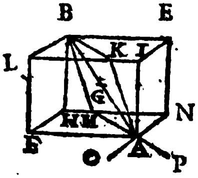


a Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcumque proportionaliter; ſecatur autem BA, biſariam in G; ſecabuntur quoque latera aduerſorum planorum AH, BI, atque ideo & baſes AH, BI, biſariam. b Cum igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH, ita ſolidum AD, ad ſolidum CB, erit parallelepipedum AB, ſectum biſariam plano CD, per centrum G, ducto. a 17. vndec. b 25. vndecimi.

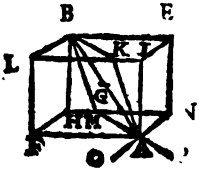
TRANSEAT ſecundo planum ſecans AI, BH, per diametros BI, AH, planorum oppoſitorum, quoniam & ſic ſecatur parallelepipedum per centrum G, imo per totam diametrum AB, c cum AB, in plano ſit parallelorum AH, BI. d Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto biſariam. c 7. vndecimi. d 25. vndecimi.



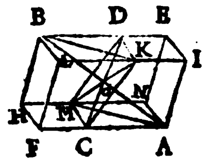
TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit aduerſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, ſecantur plano AKBM: e erunt communes ſectiones AM, BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AL, BN, factæ à plano AKBM. Quare parallelogrammum eſt AKBM: f ideoq; tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN: & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ: g ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK. h Cum igitur OAP, æqualis ſit angulo MAN: æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.) i Erunt baſes KL, MN, inter ſe, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales: & triangulum triangulo æquale. Quare & ſimilia erunt triangula BKL, AMN, k cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, rectæ MN: & angulus BKL, angulo AMN: & angulus KBL, angulo MAN, eſt æqualis, vt oſtendimus: erit & reliqua IK, reliquæ HM: & reliquus angulus e 16. vndecimi. f 34. primi. g 10. vndec. h 15. primi. i 4. primi. k 4. ſexti.



gulus BKI, reliquo A M H; & reliquus K B E, reliquo M A F, æqualis. (Eſt enim tota L I, toti N H, æqualis, & tam anguli B K L, B K I, quam anguli A M N, A M H, duobus rectis æquales: & totus angulus L B E, toti angulo N A F, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum L E, F N.) Sunt autem & latera B E, E I, lateribus A F, F H, æqualia: & anguli B E I, E I K, angulis A F H, F H M, ob parallelogramma L E, F N. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero A M H F; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula ſingulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triangula B H M, A I K: & quadrilatera A K L F, B M N E: cum inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quapropter ſolidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit ſolido contento planis B M N E, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa ſint ſimilia & æqualia, vt demonſtratum eſt. Parallelepipedum ergo A B, ſectum eſt plano AKBM, per centrum G, bifariam.



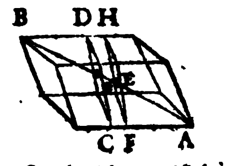
POSTREMO planum ſecans C D, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum, neque per vllos angulos eorum ductum, ſed vtrumq; ſecet plana oppoſita A H, B I. Oſtendemus autem, vt prius, planum ſecans C D, eſſe parallelogrammum, & tam rectas C K, D M, quam rectas C M, D K, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo C D, diametri C D, K M: connectanturque rectæ A M, B K. Quoniam igitur A F, B E, parallelæ ipſi L I, ob parallelogramma A L, L E, a inter ſe ſunt parallelæ: b Erunt A B, C D, in eodem cum illis plano: ac propterea ſe mutuo ſecabunt in centro G. In ſolo enim centro G, recta A B, per hypotheſim, ſecat planum C D, in quo exiſtit recta C D. c Et quoniam angulus B D C, angulo alterno A C D, æqualis eſt: d Eſt autem & angulus B G D, angulo A G C, ad verticem æqualis: & latus B G, lateri A G, æquale, quod A B, bifariam ſecetur in G, centro: e Erit & latus D G, lateri C G, æquale. Cum ergo per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtendimus, diametri C D, K M, ſe mutuo bifariam ſecent, tranſibit K M, per punctum G, ibique diametrum A B, ſecabit. Quia ergo latera B G, G D, trianguli B G D, æqualia ſunt lateribus A G, G C, trianguli A G C: f & angulus B G D, æqualis angulo A G C: g Erit & baſis B D, æqualis baſi A C. Eodem argumento æquales erunt rectæ B K, A M. Quocirca cum tria latera B D, D K, K B, trianguli B D K, æqualia ſint tribus lateribus A C, C M, M A, trianguli A C M: Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1.



a 9. vndecimi.
b 7. vndecimi.
c 29. primi.
d 15. primi.
e 26. primi.
f 15. pri.
g 4. pri.

lib. 2. decimi, anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; a Erit & baſis KL, baſi MN: & reliqui anguli reliquis angulis æquales. a 4. pri.
Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiangulum: Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit: Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum eſt quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH: & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia & quadrilatera ACKI, BDMH; item DENM, GFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN: cum hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.

SED ſecetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano GD: Igitur ſolida CB, FB, cum ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonſtrandum erat.



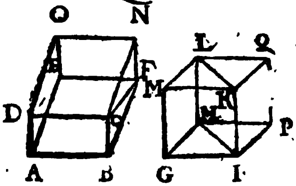
THEOR.

XLI.

THEOR 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipſa priſmata.

SINT duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud baſim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero triangulum GHI; ſitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ: Quod quidem fiet, ſi plana triangulorũ extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, conſtituta



erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorum oppoſita eſſe parallela, facile colligetur ex propoſ. 15. huius lib. a Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum eſt trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiuſdem trianguli GHI, duplum: b æqualia erunt parallelogramma AC, GP. c Quare parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis, ſuper æquales baſes AC, GP, inter ſe ſunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum priſmata ABCDEF, GHIKLM. (d Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduerſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 34. primi.

b 31. vn decimi.

c 32. vn decimi.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita: cum imperet parallelepipeda compleri: quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF; Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

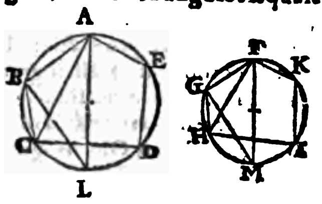
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et ſolidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; *a* erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales a 6. ſex.
ABC, FGH, habeant latera proportionalia: *b* Eſt autem angulus ALB, angulo ACB: & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, b 21. tertij.



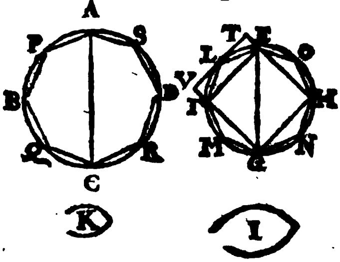
c nempe recti in ſemicirculis exiſtentes: *d* erunt & reliqui BAL, c 31. tertij.
GFM, æquales. *e* Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG: & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. *f* Igitur eſt vt qua- d 32. primi.
dratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG: cum tam quadra- e 4. ſex.
ta, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ. Quæ f 22. ſexti.
itaque

Itaque in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt diametrorũ quadrata Quod erat demonſtrandum.

11. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit vel maior circulo EFGH. Si enim eſſet æqualis *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH. & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis ſit magnitudinibus I. & K. ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidiũ eſt quadrati circa eundem circulum deſcripti, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L. recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi EF, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis HE. GF. productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium eſt parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium ſegmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt Omnia igitur triangula ſimul maiora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ EL, LF, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam vero, ſi à circulo EFGH. auferatur plusquam dimidiũ, nempe quadratum EFGH; & à reliquis ſegmentis plusquam dimidium, nempe triangula ELF, FMG &c. atque in hunc modum ſemper ſiat detractio; *c* relinquitur tandem



a 7. quinti.

b 41. primi.

c 1. dec.

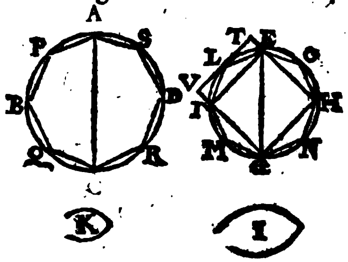
tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulũ EF, GH, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta EL, LF, FM, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K; ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis circuli ſegmẽtis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo A B C D, polygonum APBQCRDS ſimile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi ABC, ADC, bifariam ſecentur in B, & D, & rurſus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diuiſa ſit circumferentia AB CD, in quod diſtributa eſt circũferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ ELFMGNHO, vt patet. *a* Quoniam igitur eſt polygonum APB. QCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc eſt, per hypotheſim, vt circulus ABCD, ad I: Eſt autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo A B C D. *b* Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Oſtenſum autem eſt & maius. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH. a 1. *duodecimi.* b 14. *quinti.*

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonſtrabimus, minorem circulum EFGH, non poſſe ad magnitudinem, quæ minor ſit, quam maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratũ diametri minoris EG, ad quadratũ maioris diametri AC, ita vt generaliter & vniuerſe demonſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinẽ poſteriore circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe vt quadratũ diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, *c* maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam in priori parte generaliter, nõ poſſe eſſe vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum magnitudinem circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. c 14. *quinti.*

Quam

Quamuis autem circulus ABCD, maior eſt, & EFGH, minor: eadem tamen ratione oſtendemus quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non poſſe habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (ſi illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, eandẽ habere proportionẽ, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod falſum eſſe iam in priori parte generaliter demonſtratum eſt: Ita vt generaliter & vniuerſe quoque demõſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandẽ habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinẽ poſteriore circulo maiorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. Non ergo maior eſt magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor eſt oſtenſa; æqualis igitur eſt. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I:



a 7. quinti. a ſit autem vt circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis eſt magnitudini I: Erit quoque vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, ſiue circulus ABCD, circulo EFGH, maior ſit, ſiue minor. Circuli igitur inter ſe ſunt, quemadmodũ à diametris quadrata. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

(HINC fit, ita eſſe circulum ad circulum, vt polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum eſt, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, velut demonſtratum eſt.)

THEOR. 3. PROPOS. 3.

11. **OMNIS pyramis triangularem habens baſim, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.**

SIT pyramis, cuius baſis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturq; rectæ

rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum baſes triangula AEG, HIK, & vertices H, D: nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammum EBFG, & triãgula oppoſita EHG, BIF: huius vero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI: & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, nec non eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti: Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, ſecta ſint bifariam, ac



proinde proportionaliter: a erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC: & HK, AC: & EG, BC: & EF, AC: & FG, AB: & EH, BD: & EI, AD: & IF, DC: & HG, DC. b Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ: Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cum ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEIH, HEBI, IDHE. EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ: c erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC: & HGE, DCB, d proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos: ac proinde ſimile eſt triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, ſimilia per coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, ſimilis eſt, per defin. 9 lib. 11. Rurſus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, ſunt parallelæ: e erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC: & HKI: ACB. f Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos ſunt proportionalia: ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, ſimile eſt: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, ſimilia, per idem coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, ſimilis eſt quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9 lib. 11 Quoniam autem triangula AHE, HDI, ſimilia ſunt triangulo ADB, vt oſtenſum eſt ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. g ipſa quoq; inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas æquales AH, HD, conſtituta: ipſa erunt æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & ſimilia triangula AHG, HDK

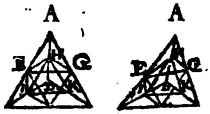
a 2. ſexti.
b 9. vndecimi.
c 10. decimi.
d 4. ſexti.
e 10. vndecimi.
f 4. ſexti.
g 21. ſexti.

ſimilia ſint oſtenſa triangulo A D C, & conſtituta ſuper æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & ſimilia erunt triangula AEG, HIK, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo A B C, & ſuper rectas poſita AE, HI, *a* quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum A E I H. Non ſecus æqualia erunt & ſimilia triangula E H G, I D K, cum ſint oſtenſa ſimilia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, *b* quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, HIKD, æquales ſunt & ſimiles, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius, vt demonſtratum eſt.

a 34. primi. *b 34. primi.*

RVRSVS, *c* quia rectæ EH, HG, GE, æquales ſunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma E H I B, F G H I, B F G E; Erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter ſe, & æqualia, per coroll. propoſ. 8. lib. 1. Ac propterea & ſimilia: *d* Sunt autem & parallela, cum E H, H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ ſint rectis B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur ſolidum B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G, B I F, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis, & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, priſma eſt, ex defin. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum C F G H I K. *e* Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint, & parallelæ rectis I K, K H, H I, ob parallelogramma C F I K, C G H K, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: *f* Sunt autem & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planum C F G, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum C F G H I K, contentum duobus triangulis CFG, K I H, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K: & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli CFG, baſis huius, per ſcholium propoſ. 41 lib. 1. *g* Ipſa inter ſe æqualia erunt.

c 34. primi. *d 15. undecimi.* *e 34. primi.* *f 15. undec.* *g 40. undec.*



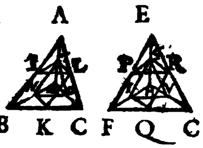
DENIQVE quia priſma E B F G H I, maius eſt pyramide E B F I, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, nec non pyramidi HIKD, vt perſpicuũ eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Maiora erunt priſmata E B F G H I, C F G H I K, pyramidibus A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero à dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor ve-

nor verò à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. IV.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraq; diuiſa & in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa ſit vtraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idq; ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SINT ſuper baſes triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, IK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraq; ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirum in AILM, MNOD, EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propoſitio præcedens: Eodemq; modo intelligatur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraq;



linea diuiſa eſt bifariam; ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterq; poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. a erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, a 12.
ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt xti.
ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, vt mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et vt vnum priſma, videlicet IBKLMN, ad vnum priſma PFQRST, b ita ſunt duo priſmata IBKLMN, b 12.
CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur quinti.
erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in

pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidum ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps eadem ſemper facta diuiſione. Sed vt illæ baſes ad has, ita eſt LK, baſis quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQG, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, vt in præcedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH. Ac propterea erunt quoque vt priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis EPRS, quam priſmata pyramidis MNOD, ad priſmata pyramidis STVH: & ita deinceps. Quare cum ſint, vt duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH,



a 12. quinti. a ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hæc illis multitudine ſint æqualia: Erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

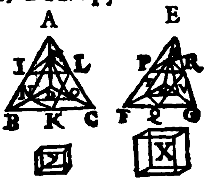
QVOD autem ſit LKC, & RQG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſis ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, b 17. vndecimi. b *ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidia, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.*

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes. v.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. SI enim non ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X: quod vel minus erit vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi à pyramide EFGH, auferatur plusquam dimidium, nempe duo priſmata PF-QRST, GQRSTV; *a* quæ maiora ſunt di-midio pyramidis EFGH: Item à reliquis py[illegible]midibus EPRS, STVH, plusquam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps: *b* relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y: erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. *c* Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X. Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD: *d* erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quam ſolidum X. Oſtenſa vero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.



a 3. *duo decimi.*
b 1 *dec.*
c 4. *duo decimi.*
d 14. *quinti.*

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG: Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, maius ponitur pyramide EFGH, *e* erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita py-

e 14. *quinti.*

ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidē ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH, ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur vt
49. quinti. baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; a ſit autem pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt ad pyramidem EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque vt baſis ABC, ad baſin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſic quoque erat ad to-
b 9. quinti. *tam pyramidem. b Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

COROLLARIVM

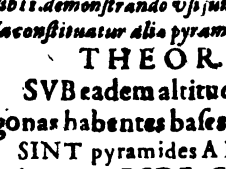
HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM ſequitur è converſo, pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in converſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidē ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin.



Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia: erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. e Quia vero eſt, vt ba- e 5. duodecimi.
ſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF: erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin

baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: *a* Sed rurſus eſt vt baſis A C D, ad baſin A D E, ita pyramis ACDF, ad pyramidem A D E F. Igitur ex æquo vt baſis A B C D, ad baſin A D E, ita pyramis A B C D F, ad pyramidem A D E F. Componendo ergo erit vt baſis A B C D E, ad baſin A D E, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem A D E F. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſim G K L, ita pyramis GHIKL, ad pyramidem GKLM: & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. *b* Rurſus quoniam eſt, vt baſis A DE, ad baſin G K L, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM: Erunt quotuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionib. cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit vt baſis ABCDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

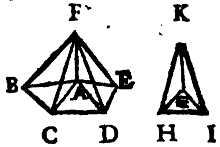
a 5. duodecimi.

b 5. duodec.

A B C D E	A B G D E F
A D E	A D E F
G K L	G K L M
G H I K L	G H I K L M

SCHOLIVM.

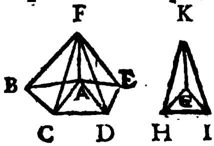
QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quarum baſes polygona latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera quam baſis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, *quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. c Quoniam vero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis, ABCF, tertia quantitas ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem: & eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem* G H I K, *quartam quantitatem: d Erit vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCDF, *tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin* G H I, *ſe-*



c 5. duodec.

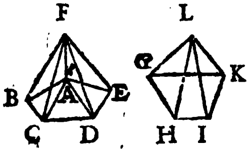
d 24. quinti.

cundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo eſt oſtenſum:
a 5. duodecimi. a & vt baſis ADE, quinta quantitas ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas ad pyramidem
b 24. quinti. GHIK, quartam quantitatem: b Erit etiam baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum.



Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK: Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat à polygono, eiuſque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere à triangulo, eiuſque pyramide, vt dictum eſt.

SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintque plura latera in vna baſe quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides.



Quia vero, vt iam eſt demonſtratum, eſt vt baſis ABC, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: & vt baſes ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem:
c 24. quint. c Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque, vt baſis ADB, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante

vt ante eſt oſtenſum; a Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE. a 24. quinti.

HANC autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes: eandem habent altitudinem

QVOD non ſecus oſtendemus, ac ea quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.

COROLLARIVM

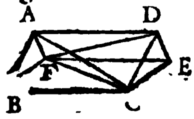
(PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandem conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandem habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autem duo demonſtrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.)

THEOR. 7. PROPOS. 7. VI.

OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo triangula oppoſita æqualia ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur enim in trib. parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD: CF, in BCEF: FD, in ADEF. *b* Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia ſunt: *c* eſtque vt baſis ABC, ad baſin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinẽ, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demiſſam: Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. b 34. primi. c 5 duodecimi.



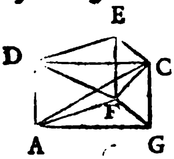
Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtitutæ, & ſub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planũ ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF: hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi

ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum priſma componentes, vt perſpicuum eſt, æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF, in tres pyramides æquales eſt diuiſum. Quocirca omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

(HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Siue priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.)

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF, ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularẽ ABE. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis.

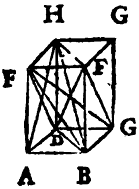


Nam ſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, a vt demonſtratum eſt: Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hæc illi ſit æqualis, imo eadem, quod eiſdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF.

a 7. duodecimi.

Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem & altitudinem; ac propterea priſma è contrario eſſe pyramidis triplum.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque ABCD, *quotlibet laterum: & priſma* ABCDEFGH, *ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam.*



Reſoluta enim baſi ABCD, *& plano oppoſito* EFGH, *in triangula numero æqualia* ADB, BCD, EHF, FGH, *erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, vt demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis* ADBH, *ad priſma* ABFEHD, *ita pyramis* BCDF, *ad priſma* CDHGFB: b *Ac propterea vt vna pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma* ABCDEFGH. *Igitur pyramides* ADBH, BCDF, *ſimul ter-*

b 12. quinti.

tiam

tiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE: propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſuper eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſuper eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine & ſuper eandem baſim ABCD, conſtituta, per coroll. propoſ. 5 huius lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horum priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

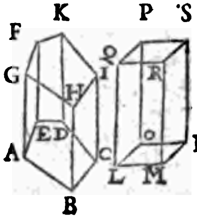
EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis, æqualis eſt pyramidi illi, quæ eandem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. huius lib: Quam quidem tam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

SCHOLIVM.

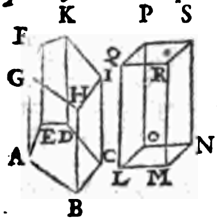
EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcunque habeant baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula, licet eorum baſes ſint parallelogramma, vertices vero linea recta: necnon de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen idipſum demonſtrabimus vniuerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana aduerſa, ſiue baſes, ſunt polygona, quamuis plura latera, ſeu anguli in vnius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata eiuſdem altitudinis ABCDEF-GHIK, LMNOPQRS, quorum baſes



ſint figuræ multilateræ. Dico vt eſt baſis ABCDE, *ad baſim* LMNO, *ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis vtriuſque baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes: Ac proinde per coroll. prædictum huius propoſ. quælibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis.* a *Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, vt baſis ad baſin, vt oſtenſum eſt, propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque vt baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.*



a 15. quinti.

CONVERSO *modo, ſi priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, vt baſes ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.*

COROLLARIVM II.

*(*VNDE *priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.*

E CONTRARIO, *Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine: Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.)*

SCHOLIVM II.

CÆTERVM *tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelligantur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo priſma dici ab Euclide, vt in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis vnum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia pars ipſius priſmatis, vt in corollario 1. demonſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, vt in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, ſed duæ tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent. 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi. ex*

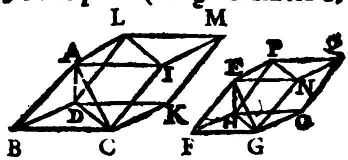
corolla-

corollario prædicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiam partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, Non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, vt vertices priſmatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemq; altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam priſmata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. VIII.

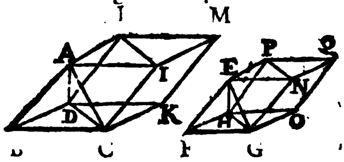
SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita vt baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula vnius ſimilia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidũ eſſe triplicatã proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta KM.



Erit igitur completum parallelepipedũ BM, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cum plana ſolidi BM, ſint parallela, vt facile colligitur ex propoſ. 15. lib 11. Rurſus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, ſunt æquales, atque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, ſimilia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, ſint æquales, ſitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH: Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma AL, BK, parallelogrammis FP, FO, ſimilia,

a 24. undec. ſimilia. a Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppoſitis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ reliquis oppoſitis tribus HQ, EQ, GQ, b ſunt æqualia, & ſimilia. Igitur ſex plana circumſcribentia ſolidum BM, ſimilia
b 24 undec.



ſunt ſex planis ſolidum FQ ambientibus: Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. ſimilia ſunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniã vero ductis rectis LI, PN, c priſmata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam priſmata dicta, earum tripla: d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ ſit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoq; proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 15. quinti.
d 11. quinti.
e 32. undecimi.

COROLLARIVM

(EX hoc quoq; eſt manifeſtum, ſimiles pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.)

SINT pyramides ſimiles, quarum baſes rectilinea ſimilia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam ſi ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppoſitos rectæ EB, EC, LH, LI, f diuiſa erunt baſes ſimiles in triangula numero æqualia, & ſimilia: nimirum triangula ABE, EBC, CDE, ſimilia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum ſimilitudinem, triangula AEF, GLM, ſimilia ſunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rurſus quia eſt vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula ſimilia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum ſimilitudinem ſimilia ſint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum ſit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH, & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. g Quare æquiangula.

f 20. ſexti.
g 5 ſexti.

gula, atque adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11 ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. a Quapropter, vt demonſtratum eſt, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, ſingulæ ad ſingulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, ſingulorum ad ſingula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam & eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemque proportionem, triplicatam ſcilicet illius; b Atque idcirco erit vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quamobrem, c cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH: habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod eſt propoſitum.

a 8. duodecimi.

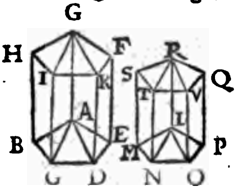
b 12. quinti.

c 12. duodec.

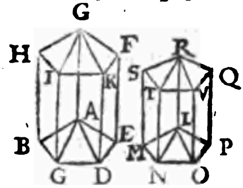
SCHOLIVM.

EADEM ratione priſmata ſimilia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIK. LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem eſſe triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam ſi ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD: LN, LO, d erunt, vt de pyramidibus dictum eſt, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, ſimilia. Similiter, ſi ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK: RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, ſimilia, cũ omnia plana priſmatũ oppoſita ſimilia exiſtant, per definitionem priſmatis. Quoniam vero ob ſimilitudinem priſmatum, parallelogramma CH, NS, ſimilia ſunt: erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM, Vt autem CB, ad CA: ita quoque eſt NM, ad NL, ob ſimilitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur, ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rurſus quoniam angulus ſolidus N, æqualis eſt ſolido angulo C, ob ſimilitudinem priſmatum: ſi ille huic ſuperponatur, omnia inter ſe cõuenient, nimirũ angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO angulo ICD: Conueniet autẽ & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, ſunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales ſunt, Ac ꝓpterea cũ latera circa ipſos oſtenſa ſint eſſe proportionalia,

d 12. ſexti.



nalia, erunt parallelogramma CG, NR, ſimilia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, ſimilia ſunt. Igitur priſmata ABCIGH, LMNTRS, ſimilia ſunt, ex defin. ſolidorum ſimilium. Non aliter oſtendentur eſſe ſimilia priſmata CDAGIK, NOLRTV, nec non priſmata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter priſmata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad priſmata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem ſingula ad ſingula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, ſingulorum ad ſingula. Ac propterea eodem modo demonſtrabimus, priſmata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante uſi ſumus ad idem demonſtrandum in pyramidibus multangulis.



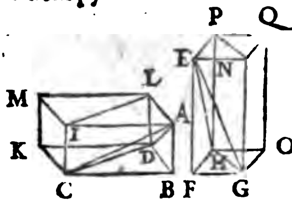
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas ſimiles diuidi in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifeſtum eſt ex demonſtratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, priſmata multangula ſimilia diuidi in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius ſcholij demonſtratione.

VII. THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines; illæ ſunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH Dico earum baſes ABC, EFG, & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt priſmata DBCILA, HFGNPE, cum ſint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia: Ac proinde parallelepipeda BM, FQ cum



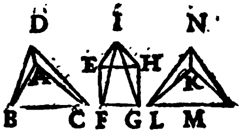
ſint

ſint priſmatum dupla; æqualia quoque erunt. a Quare baſes eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc eſt, erit vt baſis BI, ad baſin FN, ita altitudo ſolidi FQ, ad altitudinem ſolidi BM: b Vt autem baſis BI, ad baſim FN, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem ſint, quę parallelepipedorum; Ac propterea baſes & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur. a 34. vndecimi. b 15. quinti.

Sint iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius; c cum ſit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoq; baſes parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ: d Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum. c 14. quinti. d 34. vndec.

SCHOLIVM.

Eadem ratione Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes & altitudines, illa ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, baſin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum,



per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper KLM, fiat pyramis KLMN, eiuſdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent baſes, & eandem altitudinem, ipſæ erunt æquales; per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, baſes triangulares; e erit vt baſis ABC, ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponūtur autem hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis e 9 duodecimi.

ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

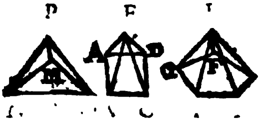
Sed reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Constructa enim figura eodem modo cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH; & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI, ponatur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt



baſis ABC, ad baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD a Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.

a 9. duodecimi

Sint deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL quarum baſes ſint multangulæ. Fiat rurſum triangulum MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE. Erit, ex ſcholio propoſ 6 huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt



nunc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.

Sed reciprocentur iam harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO, æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis ABCDE: Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIkL. Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis in propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

Omnia hæc facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyrami-

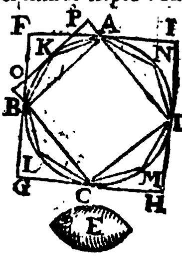
pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorũ tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogrãma, & eorũ vertices, lineæ rectæ, vt in ſcholio eiuſdem propoſ. oſtenſum eſt. Quare vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

Rurſus, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratũ eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earũ ſint tripla, vel certè ſeſquialtera, æqualia quoq; ſunt. Quod eſt propoſitũ.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

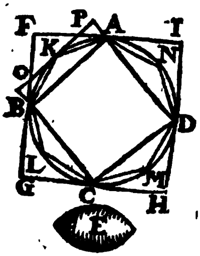
Habeant conus & cylindrus baſin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI. intelligantur q; ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI. vt ad propoſ. 9. lib. 4.



oſtendimus; a eſt q; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidium parallelepipedi baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad prop. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulum AKB, dimidiũ eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu

 paral-

parallelepipedi baſis *A* B O P: cum ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; *A*c propterea priſma baſis A k B, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura contenta linea recta *A* B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula *B* L *C*, C M *D*, *D* N *A*, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ *A* k, k B, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo priſmata eiuſdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniũ ſegmentorum cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta, & ſic deinceps. Quoniã vero ſi à cylindro, cuius baſis circulus *A* B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepidedum baſis A B C *D*, & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium *A* k B, B L C, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, *a* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni; Sint iam ſegmenta cylindri relicta baſium *A* k, k B, B L, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; S ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni, vna cum magnitudine E ipſa magnitudo E, quæ maior eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquũ priſma baſis multangulæ *A* k B *L* C M *D* N, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt cylindrus triplo coni.



a 1. *dec.*

Sit deinde cylindrus minor tripli coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelliganturque ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium eſt quadrati F G H I, vt ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtrauimus, *b* eſt-

b 6. *duo decimi.*

que vt

que vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis; Erit quoque pyramis ſuper A B C D, dimidium pyramidis ſuper baſin F G H I; ac proinde pyramis ſuper baſin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius baſis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A. bifariam in K, L, M, N, adiunganturque rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens curculum in K, quæ parallela erit ipſi A B, vt ad propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P & O, & ſuper A K B, A B O P, intelligantur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo triangulum A K B, dimidium eſt parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis ſuper baſin A K B, dimidium pyramidis ſuper baſin A B O P, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin A K B, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum baſes reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N A, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cono, cuius baſis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin A B C D, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus A B C D; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium A K B, B L C, C M D, D N A; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri. Sint iam ſegmenta coni relicta baſium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponantur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahantur ſegmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt præfatis coni ſegmentis; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum priſma eandem habens baſim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, vt ſupra in corollario

a 41. primi.
b 6. duodecimi.
c 1. dec.

rollario propoſitionis ſeptimæ huius libri à nobis eſt demonſtratum, erit huiuſcemodi priſma maius cylindro, pars toto Quod eſt abſurdum. Non ergo cylindrus, minor eſt triplo coni: Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, proptereaq; conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

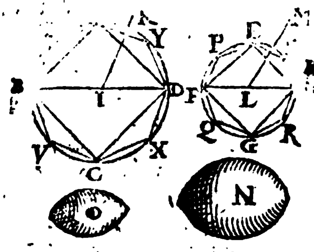
Quamuis propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, vt perſpicuum eſt eius demonſtrationem diligenter intuenti Itaq; propoſitio vniuerſe ita proponi poterit.

Omnis conus ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuslibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes.

Sint ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli A B C D, E F G H, altitudines vero æquales I K, L M. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, ſit vt baſis A B C D, ad baſim E F G H, ita conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem, nempe ad M, quæ vel maior erit, vel minor cono E F G H M. Si enim eſſet æqualis, haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; ac propterea eſſet conus ad conum vt baſis ad baſin: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O, ita vt conus E F G H M, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H. diuidanturque peripheriæ E F, F G, G H, H E, biſariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ E P, P F, F Q, &c. Quoniam igitur ſi ex cono E F G H M, detrahatur pyramis ſuper baſin E F G H.



9.
7. quinti.

ciuſdem

eiuſdem altitudinis, & à reliquis ſegmentis auferantur pyramides eiuſdem altitudinis baſium E P F, F Q G, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur, vt in poſteriore parte præcedentis propoſitionis oſtenſum eſt: a relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, exceſſus coni E F G H M, ſuper N. Sint ergo iam ſegmenta coni relicta baſium E P, P F, F Q, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus E F G H M, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmentis maior eſt: erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum E P F Q C R H S, eiuſdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo A B C D, polygonum A T B V G X D Y, ſimile polygono E P F Q G R H S, vt in propoſ. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri B D, F H. Quoniam igitur per coroll. propoſ. 2. huius lib. eſt vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita polygonum A T B V C X D Y, ad polygonum E P F Q G R H S: Vt autem circulus A B C D, ad circulum E P G H, ita ponitur conus A B C D k, ad magnitudinem N, b & vt polygonum, ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis: Erit quoque vt pyramis A T B V C X Y D k, ad pyramidem E P F Q G R H S M, vt conus A B C D K, ad N. Cum igitur pyramis A T B V C X D Y k, minor ſit cono A B C D k, pars toto, c erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quam N. Oſtenſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono E F G H M. a 1. dec. b 6. duodecimi. c 14. quinti.

Sit Secundo N, maior cono E F G H M. Cum igitur ponatur vt circulus A B G D, ad circulum E F G H, ita conus A B C D k, ad N: Erit & conuertendo vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita N, ad conum A B C D k. Ponatur vt N, ad conum A B C D k, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono E F G H M, maior quoque erit conus A B C D k, quam O. Quare erit vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono A B C D k. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N, magnitudo cono E F G H M. Sed neque maior eſt oſtenſa: Æqualis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, vt baſis A B C D, ad baſin E F G H, ita conus A B C Dk, ad N: d Sit autem vt conus A B C D k, ad N, ita idem conus A B C D k, ad conum E F G H M, erit quoque vt baſis A B C D, ad baſin E F G H, ita conus A B C D k, ad conum E F G H M. d 7. quinti. e 15. quinti.

e Quoniam autem, vt conus A B C D k, ad conum E F G H M,

ita eſt cylindrus A B C D K, qui triplus eſt coni AB CD G,) ad cylindrum E F GHM; (qui triplus eſt coni FEGHM,) Erit quoque vt baſis A LCD, ad baſin E F G H, ita cylindrus A B C D K, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, in ſe ſunt, vt baſes. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Perſpicuum quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

Conuertetur hæc propoſitio hoc modo.

Si coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiuſdē altitudinis ſemper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti vel ſcaleni, ſiue vnus, rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel vna & eadem.

Item ſequitur, conos & cylindros æquales, ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et æquales in eadem altitudine ſuper æquales baſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

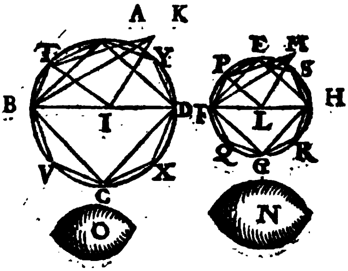
x.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

Sint coni & cylindri, quorum baſes circuli A B C D, E F, G H, axes vero L K, L M, & diametri baſium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportio- [illegible] diametri ad diametrum. [illegible] circe- [illegible] A B C D K, [illegible] N.

proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, vel minor, vel maior cono E F G H M. Si enim eſſet æqualis, *a* haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni AB C D K, ad conum E F G H M, eſſet quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatque eadem prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita vt rurſus pyramis EPFQGRHSM, maior oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, M F, M P, vt habeãtur duo triãguli BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, ſimiles ponuntur; erit ex 24. defin. lib. 11. vt diameter B D, ad diametrum FH, *b* ac propterea vt ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis I K, ad axem L M; Ac permutando vt B I, ad I K, ita FL, ad L M. Cum igitur anguli B I K, F LM, recti ſint ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, proptereaque axes recti ad eorum baſes; *c* Erunt triangula B I K, FLM, æquiangula; *d* Ac propterea vt K B, ad B I, ita erit M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad E P, ob ſimilitudinem triangulorum B I T, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus B T, F P, ſint æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtenſum eſt: ſitque vt B I, ad IT, ita FL, ad L P, ob æqualitatem tam linearum B I, I T, quam F L, L P; & erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, vt K B, ad B T, ita M F, ad F P. Rurſus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia ſunt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateribus comprehenſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis I K, rectus ponatur ad circulum A B C D, *f* erunt baſes K B, K T, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ M F, M P: Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erunt, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis. *g* Quoniam vero vt K B, ad BT, ita K ad eandem BT: Item vt M F, ad F P, ita M P, ad eandem F P. autem vt K B, ad B T, ita M F, ad FP: Erit quoque vt K T ita M P, ad F P: Et conuertendo vt B T, ad T K, ita F P Quare cum ſit vt T K, ad K B, ita P M ad M F, ad F P; Et vt B T, ad T K, ita F P ad P M habebunt triangula B K T, E



a 7.

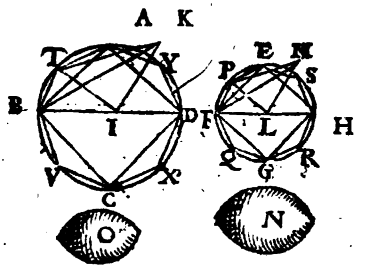
b 15. quinti.

c 6. ſex.
d 4. ſex.

e 6. ſex.

f 4. pri.

que æquiangula erunt: Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendentur reliqua triangula ambientia pyramides A T B-V C X D Y k, E P F Q G R H S M, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cum ſint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides ſimiles ex defin. 9 lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum B T, F P, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP:



a 11. quinti.

a Et vt BI ad FL, ita BD, ad FH Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDk, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXD-YK, ad pyramidem EPF-QGRHSM, ita conus ABCDk, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYk, minor ſit cono ABCDk, pars toto, b erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt magnitudo N, cono EFGHM.

b 14. quinti.

Sit deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVC-XDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDk, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM: & conuertendo vt N, ad conum ABCDk, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBV-CXDYk. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EP-FQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYk, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PE, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD: habebit quoq; N, ad conum ABCDk, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ACBDk, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHk: c erit quoque conus ABCDk, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDk, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conum ad magnitudinem

c 14. quinti.

alie

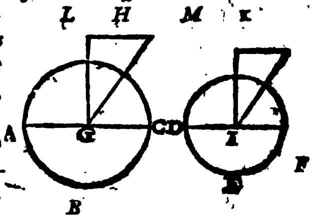
alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent baſium diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono E F G H. Sed neque minor eſt oſtenſa. Æqualis igitur eſt; a ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionem ad conum E F G H M, & ad N. Cum ergo ponatur conus A B C D K, ad N, in triplicata proportione diametrorum B D, & F H; erit quoque conus A B C D K, ad conum E F G H M, in earundem diametrorum proportione triplicata. a 7. quinti.

b Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoq; obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atq; priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat. b 15. quinti.

SCHOLIVM.

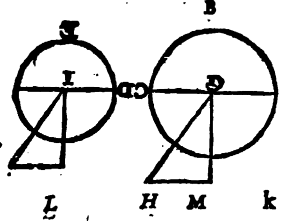
Quod ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8 huius lib minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterũ homologorum triplicatã. Id quod ad defin. 10. lib. 5 monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatẽ ad minorem, vt habeatur proportio dupli[illegible], triplicata, &c.

Hæc porro propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cũ in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli A B C, D E F, axes vero G H, I K. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrũ triplicatam. Intelligãtur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundẽ cũ ſcalenis altitudinũ, quorũ axes G L, I M, Ducanturq; per rectas G H, G L; Item per I K, I M, plana ſecã. in baſes lineis rectis A C, D F, quæ diametri baſiũ erũt. Quoniã igitur axes G L, I M, recti ſunt baſibus A B C, D E F, c erũt & plana per G H, G L; & per I K, I M, ad eaſdẽ recta. d Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadẽt in A C, D E, cõmunes ſectiones; & prœinde erunt anguli C G H, F I K, anguli inclinationũ, qui æquales inter c 18. vndec. d 38. vndec.



ſe erunt

ſe erunt, cum coni & cylindri ſcaleni ſimiles ponantur: Sunt autem
a 32. primi *& anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex deſin. 3. lib. 11. a Reliqui igitur, HGL, KIM, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur eſſe eiuſdem altitudinis; erit recta HL. per axium vertices ducta ipſi AC, parallela;*
b 29. primi. *b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti ſint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum ſint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK, Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula ſunt;*



c 4. ſex. *c atque idcirco erit vt GH, ad GL. ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem IK, ita eſt AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri ſcaleni ponantur ſimiles. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, vt diameter AC. ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylin-*
d 12. duodec. *dri recti ABCL, DEFM, ſimiles erunt ex definitione. d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant baſim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, vt conſtat ex coroll propoſ. 11. huius lib. Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM. ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, ideoque proportio coni & cylindri ABCH, and conum & cylindrum DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

xj.

Si cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Secetur cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduerſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axem EF, in I. Dico vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantum libet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ EK, KL, æquales ipſi EI. Item quotcunque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, diſcribent circulos GH, PQ, QS, TA, VZ,

T *a*, V Z X Y, parallelos æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circumferuntur. Atq; propterea cylindri erunt S P, P *A*, A H, H D, *D* T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum S Q X Y. Quoniam vero tam cylindri S P, P A, A H, ſuper baſes æquales Q P, P R *B A*, & ſub altitudinibus æqualibus k L, E k, *I* E, æquales ſunt, quam cylindri X Z, Z T, T D, *D* H, ſuper æquales baſes X Y, V Z, T *a*, C D, & ſub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus



S H, cylindri *A* H, quam multiplex eſt axis I L, ipſius axis *I* E; Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quam multiplex eſt axis I O, ipſius axis I F. Quoniam autem ſi axis I *L*, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi I O, (multiplici axis I F, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe; cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunque hæc contingat multiplicatione; Erit, per defin 6. lib. 5. ita axis *I* E, prima magnitudo ad axem I F, ſecundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Etſi hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demõſtrat, tamen eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodabis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni, ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita vt quemadmodum in cono recto rectangulũ circa quieſcens latus circumfertur, ſic quoque



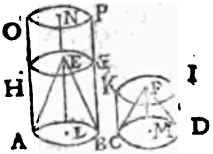
in conis ſcalenis circumferantur ſemidiametri L S, k R, E A, &c. ſemper æquidiſtantes circa centra L, k, E, &c. vna cum recta S Y, ſemidiametros coniungente. Hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, vt conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſectione cylindri.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xj.

Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.

Sint

Sint ſuper baſes æquales A B, C D, duo coni *A B* E, C D F, & duo cylindri A B G H, C D I k, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) L E, M F. Dico eſſe conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum *A* B-G H, ad cylindrum C D I k, vt eſt altitudo L E, ad altitudinem M-F. Extendatur enim cylindrus *A* B G H, ad partes G H, vna cum eius axe *L* E, & rectangulo A G; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O P, eiuſdem altitudinis cum cylindro C *D* I k. Quoniam igitur cylindri H-P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ.



a 7. quinti. 11. buius lib. *a* cylindrus *A* G, ad ipſos eandem habebit proportionem. *b* Eſt autem

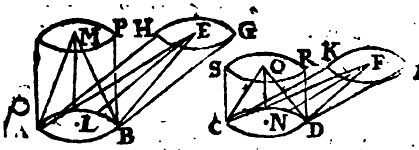
b 13. duode. cylindrus A G, ad cylindrum H P, vt axis ſeu altitudo L *E*, ad axem ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo *L* E, ad altitudinem M F.

c 10. duode. *c* Quia vero coni *A* B E, C D F; ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; *d* ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem, Ac

d 15. quinti. proinde erit quoque conus A *B* E, ad conum C *D* F, vt altitudo L-E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Hoc idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E, C D F & cylindri A B G H, C D I k, ſcaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conum A B E, ad conum C D F & cylindrum A B G H, *ad cylindrum* C D-



I k, eſſe, vt eſt altitudo L M, *ad altitudinem* N O *Super baſin enim*

e 14. duod. *A*B, *conſtruatur cylindrus rectus A* B P Q, *ſub altitudine* L M, *item ſuper baſin* C D, *cylindrus* C D R S *ſub altitudine* N O. *Quoniam igitur eſt cylindrus rectus A B P Q ad cylindrum rectum* C D R S *vt altitudo* L M, *ad altitudinem* N O *Eſt autem cylindro A B P Q cylindrus* A B G H; *Item cylindro* C D R S, *cylindrus* C D I k, *æquales, ex coroll. pro.* 11 *huius lib. Erit quoque cylindrus* A B G H, *ad cylindrum*

f 10. duode. C D I k, *vt altitudo* L M, *ad altitudinem* N O. *Quod eſt propoſitum.*

Quoniam autem coni, ſcum ſint tertiæ partes cylindrorum,

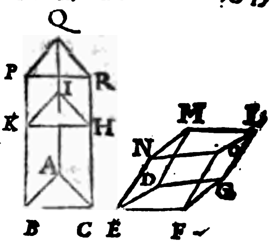
eam. cm

a eandem habeant proportionem, quam cylindri. Erit quoq; conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinem cum cylindris ABPQ CDRS. a 15. quinti.

Idem concluditur quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus; alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cũ cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demõſtrauit: Erit quoq; cylindrus ſcalenus ABGk, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

b Quoniam vero coni eandem habent proportionem quam cylindri, c cum illi horum ſint tertiæ partes; Erit etiam conus ſcalenus ABE ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtendetur eadem ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt. b 15. quinti. c 10. duodec.

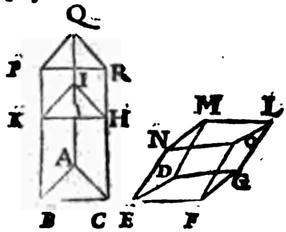
Eadem quoq; hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC DEFG, priſmata ABCHIk, DEFGLMNO, & pyramides ſub eiſdem altitudinib. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namq; inſiſtentes lineæ AI, CH, Bk priſmatis ABCHIk, ad baſin ABC, perpendiculares, ita vt Bk ſit altitudo priſmatis ABCHIk. Productis autem rectis AI CH Bk, ſumantur IQ HR, kP, æquales altitudini priſmatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, complentur priſma HIkPQR, eiuſdem altitudinis cum priſmate EL. Eruntq; priſmata HIkPQR EL, cum habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll 2. propoſ. 7 huius lib. d Ac propterea priſma ABCHIk, ad vtrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex ſcholio propoſ. 25 lib. 11. priſma ABCHIk, ad priſma HIkPQR, eſt vt planum BI, ad planum kQ. e Et vt planum BI, ad planum kQ, ita eſt recta Bk, ad kP; erit priſma ABCHIk, ad priſma HIkPQR, hoc eſt, ad priſma EL, vt Bk, altitudo priſmatis ABCHIk, ad kP, altitudinem priſmatis HIkPQR hoc eſt, priſmatis EL. Quod propoſitum. d 7. quinti. e 1. ſexti



Quod ſi inſiſtentes lineæ AI, CH, Bk, non ſint perpendiculares ad baſin ABC, conſtituendum erit ſuper baſin ABC, aliud priſma

cuius

enim inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK: Nam cum ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habẽtia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtitutũ ad priſma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem, erit & priſma ABCHIK, ad priſma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.



a 15. quinti. *a Quoniã vero pyramides eandem proportionem cum priſmatis,*
b 10. quinti. *b quod illa ſint horum tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoq; eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.*

Eadem prorſus ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atque ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

Hæc omnia eodem ferè modo demonſtrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

Omnia quoq; hæc facile conuerti poſſunt hoc modo:

Coni & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines baſes habebunt æquales.

Nam alioquin pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.

xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

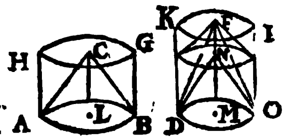
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

Sint æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes, altitudines vel LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. *Si* altitudines LC, MF, ſint æquales; cum cylindri ponantur quoque æquales, erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis AB, ad baſim æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

Quod

QVOD ſi altitudines L C, M F, inæquales fuerint, ſit M F, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi L C, æqualis: & per N, ducatur planum ON, baſi D E, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri A B G H, DEIK: *a* erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus DEI K, ad eundem cylindrum DO. *b* Eſt autem vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita baſis A B, ad baſin D E, cum æquales ſint altitudines: *c* Item vt cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, imo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc eſt, ad huic æqualem L C: Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

a 7. quinti. *b 11. duodec.* *c 14. duodec.*



IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales: erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales. *d* cũ coni ſint cylindrorum tertiæ partes, Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas: Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demõſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, vt in figura. *d 10. duodec.*

SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris cõfirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC: erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN: *e* Eſt autem vt baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: *f* Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cum baſes ſint æquales: erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO: *g* Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit. *e 11. duodec.* *f 14. duodec.* *g 9. quinti.*

AT vero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quam

obrem, vt oſtenſum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales, quo oſtendimus cylindros æquales eſſe. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

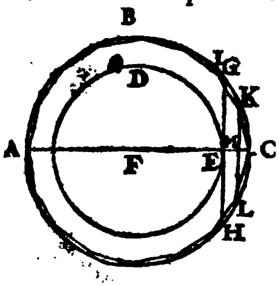
NON difficile erit idem oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoq; recti eaſdẽ cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eadem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, vt demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoq; erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

XIII. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli A B C, D E, circa idem centrum F, oporteatque in maiori A B C, inſcribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem



DE. Extendatur per centrum F, recta A C, ſecans circulũ DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulũ D E, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Quoniã igitur arcus A G C, maior eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidiũ IK, & ſic deinceps; e relinquetur

e 1. decimi. tandẽ minor arcus quam CG Sit igitur iam arcus CK, arcu CG minor, & ſubtendatur recta CK. Dico rectam CK, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes

numer

numero & magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuiſus eſt quadrans BC; nec non ſemicirculus AHG, in totidem partes, quot continet ſemicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ ſubtendantur, *a* quæ æquales quidem erunt ipſi rectæ a 29. CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptum tertij. erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AG, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti ſunt: *b* erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tan- b 29. gat circulum DF, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra di- tertij. ctum circulum, nec vnquam ipſum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neq; alia latera polygoni inſcripti, cum æqualia ſint lateri CK, *c* ideoque æqualiter cum CK, à centro F, diſtent, cir- c 14. culum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem cen- tertij. trum exiſtentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

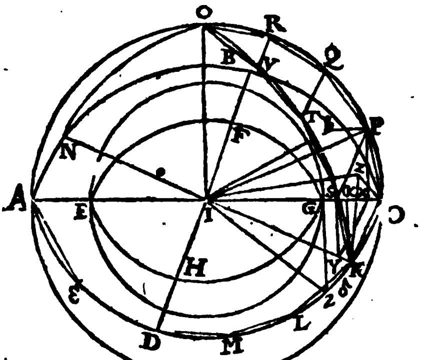
(HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed tota extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.)

PROBL. 2. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatq; in maiori ABCD, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrũ ſphærarũ I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadẽtes ex I, ad peripherias ſectionũ ſunt æquales, cum ducantur ex centro ſphærarũ ad earũ ſuperficiem; erunt ipſæ ſectio-

nes, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BC, ſeſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, vt ſint
a 16. duodec. quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. *a* Deinde in maiori circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vſque circuli ABCD, quæ circulum
b 1. quarti. EFGH, tangit in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectæ Gγ, *b* applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero ſi arcui
c 19. primi. Cγ, intelligatur ſubtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, *c* latus Cγ, oppoſitũ maiori angulo, nempe recto, maius eſt latere Gγ,



quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo
d 1. dec. CL, dimidium LK, & ſic deinceps: *d* relinquetur tandem arcus minor arcu Cδ, ſeu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritque recta CK, ſubtenſa minor quam recta Aε, hoc eſt, quam Gγ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, eſſe vnum latus polygoni ęquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tangat circulum EFGH, vt ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet: multo minus recta CK, ſubtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulũ tan-
e 12. vndecimi. get. Rurſus ducta diametro KN, *e* erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN,
f 18 vndecimi. plana ducantur, *f* quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes ſectiones, circulos, vt iam dictum eſt, quorum ſemicirculi ſint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti
g schol. 1. ter. ſunt, ex defin. 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt OC, OK: atque adeo cum circuli ABCD, DOC, NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ maioris diametri, quoque quadrantes CD,

tes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æ-
quales diſtribuatur, in quot diuiſus fuit arcus CL: & quadrantes
OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus qua-
drantis CD: *a* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus ſub- a 29.
tenſæ, nimirum CK, KL, LM, MD: CP, PQ, QR, RO, KS, ST, *tertij.*
TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demit-
tantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, b 38.
SY *b* quæ in communes ſectiones AC, NK, cadent: *c* eruntque *undec.*
inter ſe parallelæ. c 6 *un-*

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKI, anguli PXC, *decimi.*
SIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. *d.* & anguli PCX, SKY, æqua- d 27.
les, quod & æquales ſint peripheriæ AOP, NOS, quibus inſi- *tertij.*
ſtunt: (Nam ſi ex ſemicirculis AOC, NOK, æqualibus deman-
tur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales
quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX,
æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem
& latera PC, SK, rectis angulis oppoſita, æqualia. *e* Igitur reliqua e 26.
latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare *primi.*
cum rectæ PY, SY, æquales ſint & parallelæ: ſi connectatur recta
XY, *f* æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter ſeſe. *g* At f 33.
quia & rectæ CK, XY, parallelæ ſunt, quod latera IC, IK, pro- *primi.*
portionaliter ſecta ſint. (Si enim ex ſemidiametris IC, IK, æqua- g 2 *ſex.*
libus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY,
æquales: AC proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad IK) *h* Erunt h 9.
parallelæ quoque PS, CK, inter ſe, cum vtraque parallela ſit ipſi *duodec.*
XY, *i* ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS: in eodem cum i 7. *un-*
ipſis plano exiſtent. Totum igitur quadrilaterum CK, SP, in vno *decimi.*
erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli
ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, oſten-
demus ſimiliter CK, QT, eſſe parallelas: atque adeo ipſas PS,
QT, inter ſe parallelas eſſe, cum eidem CK, ſint parallelæ: to-
tumque quadrilaterum PSTQ, in vno eſſe plano. Eadem ratio-
ne in vno erit plano quadrilaterũ QTVR. *k* Eſt autem & trian- k 2. *un*
gulum RVO, in plano. Si igitur eadem conſtructio exhibeatur *decimi.*
ſuper reliqua latera KL, LM, MD, ductis ſcilicet quadrantibus
OL, OM, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo he-
miſpherio, vt tota ſphera maior repleatur quadrilateris, & trian-
gulis, quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes OC, OK: ſuper
latus CK, conſtructis, inſcriptum erit in ſphæra maiori ſolidum
polyedrum circumſcriptũ dictis quadrilateris atque triangulis.
Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

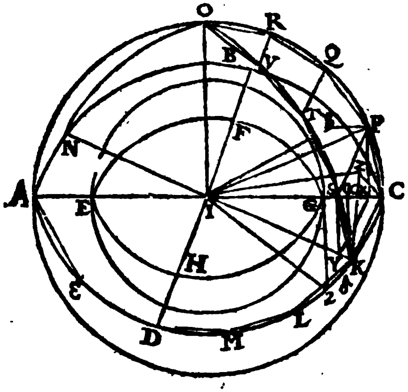
DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis
IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autem perpendi-
cularem IK, intra quadrilaterum CKSP, in ſcholio ſequenti

 oſten-

oſtendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3 lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; a erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia: Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erũt, ideoque & ipſæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter oſtendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales eſſe & inter ſe & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, deſcriptus per quatuor puncta C, K, S, P tranſibit. Eademq; ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulũ RVO, circulos deſcribi poſſe: demõſtrabimus. Quoniam vero, vt poſtea oſtendemus, angulus CZK, obtuſus eſt: b erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarũ ZC, ZK: ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

a 47. primi.

b 12. ſecund.



DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla ipſius AI, & Aα, maior ſit, quam AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quam ob rem cum ſit, c vt AC, ad Aα, ita rectangulum ſub AC, αC, ad rectangulum ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadem altitudo αC: erit quoque rectangulum ſub AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. d Eſt autem rectangulum ſub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK, & rectangulum ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα: quod recta CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis, & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratũ rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. e Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadra-

c 1. ſex.

d 17. ſexti.

e 47. primi.

tis re-

tis rectarum I α, α K. Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ α K; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tangat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta K α, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint a ſphæra EFGH, quam punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: a Eſt autem a 19.
CK, maior quam Z G, quod angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox primi.
demonſtrabitur; Multo maior erit Gγ: quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ Z C. b Quia vero b 47.
quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gγ; & primi.
quadratum rectæ IC, quadratis rectarum I Z, Z C; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, Gγ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur, quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quamobrem, cum I G, ſit Sphæræ minoris EFGH, ſemidiameter, exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ. deſcripti, vt demonſtratum eſt; Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus Iβ P, rectus ſit, ex 3 defin. lib. 11. c erit quadratum rectæ I P, æ- c 47.
quale quadratis rectarum Iβ, β P. Quia vero & quadratum rectæ primi.
I C, (quod æquale eſt quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarũ I Z, Z C; erunt quadrata rectarum Iβ, β P, quadratis rectarum, I Z, Z C, æqualia; Eſt autem quadratũ rectæ ZC, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, maior ſit, quam linea β P, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratũ rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ I Z, maius erit; ideoq; & linea, Iβ, maior quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæram maiorem EFGH. Eodem modo demonſtrabimus,

 quod

quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſſint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

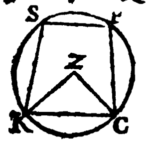
COROLLARIVM

(EX iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quã habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum: vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrũ deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium: Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cũ ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum: vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autẽ, vt vna pyramis ad vnã pyramidẽ ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque adeo diametrorum
a 15. quinti. *ſphærarum, a cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.)*

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera: quæ tamen nondum ſunt demonſtrata: idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonſtranda.

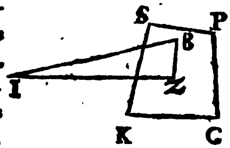
PRIMVM itaque oſtendendum eſt, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus.



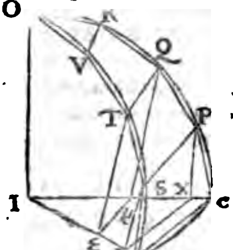
Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſint.) Eſt autem IK, maior quam IY:
b 14. quinti. *b erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſa ipſi SP, erit quoque KC, maior quam SP. Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior*
c 24. tertii. *erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. c Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ: (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores: Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS,

CP, KS, quadrantem circuli CK, SP, excedet: atque à ſemicirculo ſuperabitur: ac proinde multo magis ſegmentum SP, minus erit ſemicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non eſſe in illis ſegmentis, ſed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione oſtendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demiſſas, qualis eſt Kβ, cadere intra quadrilatera: nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipſum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior eſt: angulus CZK, obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ſcholio propoſ. 27. lib 3.

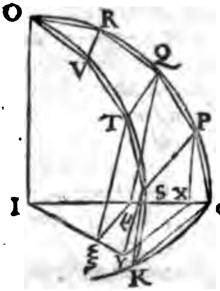
SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppoſitum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirum acuto, opponitur: Ac propterea punctum θ, longius à centro I, diſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare. a 19. pri.



TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam ZC, maiorem eſſe recta βP. Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam PS, maiorem eſſe recta QT. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo eſt triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, b quæ in communes ſectiones IC, IK, cadent, c eruntque inter ſeſe parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta μξ: erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe æquales SP, XY. d Quia vero μξ, ipſi CK, parallela eſt quod latera IC, IK, proportionaliter ſint ſecta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY: e erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ: Eſt autem IY, maior quam Iξ. f Igitur & YX, maior erit quam ξμ: Ac proinde & PS, quæ æqualis eſt ipſi XY, maior erit quam QT; quæ æqualis eſt ipſi ξμ. b 38. vndec. c 6. vndec. d 2. ſext. e 30. pri. f 14. quinti.



HOC ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, ϛ, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli egrediantur que è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP: ϛP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo

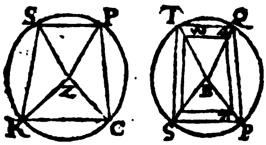


latera ZK, ZC, æqualia, ponuntur lateribus βS, ζP, & baſis KC, maior eſt baſe PS; a *erit angulus KZC, maior angulo SζP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TζQ. At quoniam baſes KS, CP, baſibus ST, PQ. ſunt æquales;* b *erunt anguli KZS, CZP, angulis SζT, PζQ. æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad ζ: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta ZC, rectæ ζP.*

a 25. primi.
b 8. primi.

SIT deinde ZC, minor quam ζP, & abſcindantur βπ, βϱ, βω, βφ, ipſis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq́ue rectæ πϱ, ϱω, ωφ, φπ, c *quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris ſectæ ſunt proportionaliter; ac proinde ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βϱ, ad ϱπ.*

c 4. ſexti.



d 14. quinti. *Cum ergo βS, maior ſit quam βϱ,* d *erit & SP, maior quam ϱπ. Eademq́ue ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ϱω, πφ, φπ: Ac propterea cum PS, minor ſit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP: & TQ. minor quam PS, erunt rectæ πϱ, ϱω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βϱ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, ſint æquales:* e *erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta ZC, quam βP: Sed neq; æqualis eſt oſtenſa: Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.*

e 25. primi.

XV.

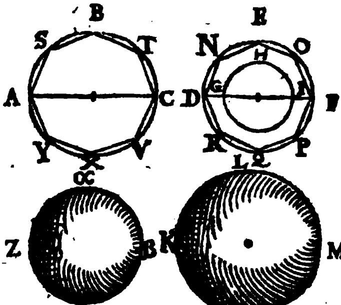
THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SINT duæ ſphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico ſphæram ABC, ad ſphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra ABC, ad aliam ſphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quam DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum AC, ad diametrũ DF. Habeat primum ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæræ DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque ſphæra GHI, concentrica ſphæræ DEF. f Inſcribatur

f 17. duodecimi.

batur in ſphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI: Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF:



Eſt autem per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, a erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. a 14. quinti.

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedẽtis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrũ DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR,: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphærã Zαβ, proportionẽ triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoq; ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphærã Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatã diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt,

non

non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem non habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neq; ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt triplicata ratione ſuarum diametrorum, Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM

(HINC *fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ſimile habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.*)

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI-

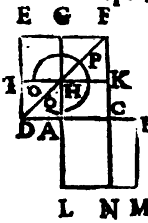
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et ſolidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducta diametro EF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela, ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. *a* Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: *b* erit rectangulum CM, ſub AB, CB. æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB: & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: *c* Eſt autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, qua-

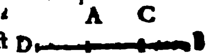


a 3. deſi. ſexti.
b 17. ſexti.
c 1. ſexti.
d 43. primi.

AM, quadruplum ſit quadrati AI, ex ſcholio propoſ. 4 lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD, erit & gnomon OPQ eiuſdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni OPQ, addatur ipſum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratū CE, quadrati AI.

ALITER. Ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum eſt quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ

a 2. ſec. AD, ponatur. *a* Eſt autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis ſub AB, AC, & ſub AB, BC, cōprehenſis; Et rurſus, quod ſub AB, AC, æquale eſt ei, quod ſub AD, AC, bis; (ſicut enim AB,



b 1. ſexti. AD, eſt dupla, *b* ita quoque erit rectangulum ſub AB, AC, rectanguli ſub AD, AC, duplū ipſius cum vtriuſq; rectanguli eadē ſit altitudo AC. Ac propterea rectangulum ſub AD, AC, bis ſum-

c 17. ſexti. ptum æquale erit rectangulo ſub AB, AC.) *c* Quod vero ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ AC, cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ AD.

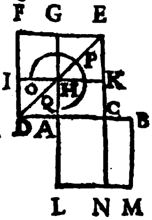
d 4. ſec. *d* Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale ſit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

12. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ.

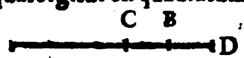
DIVISA ſit recta AB, in C, poſſitq; quintuplum ſegmenti AC; ſumatur autem ipſius AC, dupla CD, quæ, vt poſt oſtendemus, maior erit reliquo ſegmento BC. Dico ſi CD, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe CB, reliquam partem prioris lineæ. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratū BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipſi AF, parallela CG, ſecans diametrum in pūcto H, per quod agatur IK, parallela ipſi AB; Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturque EB, ad N. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum

plum ponitur quadrati CI: Si tollatur quadratum CI, relinque-
tur gnomon OPQ, eiuſdem quadrati CI, quadruplus. Eſt autem
& quadratum CM, quadruplum quadrati CI,
ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta CD,
dupla ſit rectæ AC. Igitur gnomō OPQ qua-
drato CM, æqualis erit. Rurſus quoniam CD,
ponitur ipſius AC, dupla; eſtque LC, ipſi CD:
& CH, ipſi AC, æqualis: erit & LC, ipſius CH,
dupla. *a* Cum igitur ſit vt LC, ad CH, ita re-
ctangulum LB, ad rectangulum CK: erit quo-
que illud huius duplum: *b* Eſt autem CK, ipſi
HF, æquale. Aequale igitur eſt LB, ipſis CK, HF: Ac proinde &
reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam
ergo ſunt tres rectæ CD, CB, BD: eſtque rectangulum BM, ſub
CD, BD, comprehenſum æquale ipſi KG, quadrato rectæ CB: *c*
Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem, ex definitione,
recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius
ſegmentum CB.



a 1. ſexti. *b 43. primi.* *c 17. ſexti.*

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum po-
nitur quadrati rectæ AC: *d* eſtque quadratum rectæ AB, æquale
quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo ſub AC, CB,
bis: Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vna cum rectāgulo ſub
AC: CB, bis quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur
quadrato rectæ AC, relinquetur quadratū rectæ CB, & rectāgu-
lum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdē quadrati rectæ AC: Eſt
autem & quadratū rectæ CD, eiuſdem quadrati rectæ AC, quadru-
plum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2: Aequale igitur eſt quadratum
rectæ CB, & rectangulum ſub AC,
CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum
ergo rectangulum ſub AC, CB, bis,



æquale ſit rectangulo ſub CD, CB: (ſicut enim recta CD, dupla eſt
rectæ AC, *e* ita quoque duplum erit rectangulū ſub CD, CB, re-
ctanguli ſub AC, CB: cum vtriuſque rectāguli eadem ſit altitudo
CB: Ac propterea rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectan-
gulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangu-
lum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: *f* At quadratū rectæ
CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur
quadratum rectæ CB, & rectangulū ſub CD, CB, æquale erit re-
ctangulis ſub CD, CC, & ſub, CD, BD: Ac proinde dempto com-
muni rectāgulo ſub CD, CB, relinquetur quadratū rectæ CB, æ-
quale rectangulo ſub CD, BD: *g* ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad
DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ra-
tione, eſtque ſegmentū maius CB. Si igitur recta linea ſuiipſius
ſegmenti quintuplum poſſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 4. ſec. *e 1. ſexti.* *f 2. ſec.* *g 17. ſexti.*

LEM-

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum recta CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati recta AC; Addito quadrato recta AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati recta AC. Eſt autem quadratum recta AD, maius quadratis rectarum AC, CD, a cum aquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum recta AD, maius quoque erit quintuplo quadrati recta AC: Ac propterea maius quadrato recta AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati recta AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum.

a 4. ſecundi.

b 11.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplum eſſe quadrati rectæ CD. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipſis AF, BE, parallelæ CG, DH, ſecantes diametrũ in I, K, punctis, per quæ agantur ipſis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ ſecent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC dupla eſt rectæ CD, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum LG, quadruplũ quadrati PQ. Eſt autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum ſit vt AB, ad AC ita AC, ad CB, b erit rectangulum ſub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipſi LG.) Igitur & CE quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia ſunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD: erunt earum latera HK, IQ, c æqualia: ac proinde rectæ EO, OM, ipſis oppoſitæ æquales erunt. d Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. e Eſt autem IO, ipſi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æqualis



b 17. ſexti.
c 34. primi.
d 36. primi.
e 43. pr.

æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, oſtenſum ſit quadruplum quadrati PQ: erit etiam gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD.

ALITER. Cum AC, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita CB, a erit rectangulum ſub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum ſub AA, CB, quadruplum eſt quadrati rectæ CD; (Nam cum ſit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum ſub AB, AC, æquale quadrato rectæ AC: quod cum ex ſcholio propoſ. 4. l. 2. quadruplum ſit quadrati rectæ CD: erit & rectangulum ſub AB, BC, quadruplum eiuſdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulũ ſub AB, BC, vna cũ quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Quod erat oſtendendum.



a 6. ſecundi
b 17. ſexti

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonſtrabimus quoq; cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter ſecetur; & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur quadrati. Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diuiſa inæqualiter in C, cuius maius ſegmentum AC, bifariam ſectum ſit in D; ſitq; quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priori huius propoſ. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex ſcholio propoſ. 4. Lib. 2. Eſt autem & gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus, (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ.) ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale eſt rectangulum CE, vt ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, ſub AB, BC, comprehenſum: c Ac proinde erit, vt AB, ad AC, ita

c 17. ſexti.

ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.

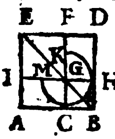
a 6. ſecundi. *ALITER Cum AC, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita CB, a erit rectangulum ſub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD: Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, deſcriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, deſcripti; erit & rectangulum ſub rectis lineis AB, BC, deſcriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ CD, Quare ablato quadrato rectæ CD: rectangulum ſub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Eſt autem eiuſdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ*

b 17. ſexti. *AC, æquale eſt rectangulum ſub AB, BC. b Quamobrem erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

v. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque ſegmentum maius AC, & minus CB, Dico quadrata rectarum AB, BC, ſimul tripla eſſe quadrati rectæ AC, Deſcribatur



enim ſuper AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipſi BD, parallela CF, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipſi AB. Erunt que CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. Quoniam igitur eſt, vt AB, ad AC, ita AC,

c 17. ſexti. ad CB: c erit rectangulum ſub AB, BC, nempe AH, æquale ipſi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale ſit ipſi CD: erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF: Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectæ BC, eiuſdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

d 17. ſexti. ALITER. Quoniam eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: d erit rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum ſub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. e Sunt autem quadrata rectarum

e 7. ſecundi. AB, BC, ſimul æqualia quadrati rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC. Quocirca ſi recta ſecundum extremam &

mediam

mediam rationem ſecetur; Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.)

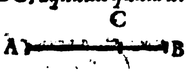
SCHOLIVM.

CONVERSVM *etiam huius verum eſt, videlicet.*

SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti; Recta illa extrema ac media ratione ſecabitur.

SECTA *ſit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris ſegmenti BC, vtraque ſimul tripla ſint quadrati maioris ſegmenti AC. Dico rectam AB, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Conſtructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla ſint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, vna cum quadrato CH, duplus eiuſdem quadrati IF: Eſt autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, GD; Igitur & rectangula AH, CD, dupla ſunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia ſint AH, & CD, erit AH, ipſi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, ſub AB, BC, æquale ſit quadrato IF, rectæ AC: a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac propterea AB, diuiſa erit in C, extrema ac media ratione.* a 17. ſexti.

ALITER. *Cum quadrata rectarum* AB, BC, *tripla ſint quadrati rectæ* AC; b *Sint vero quadrata rectarum* AB, BC, *æqualia quadrato rectæ* AC, *& rectangulo ſub* AB, BC, *bis: erit & quadratum rectæ* AC, *vna cum rectangulo ſub* AB, BC, *bis, triplum quadrati rectæ* AC. *Dempto ergo quadrato rectæ* AC, *relinquetur rectangulum ſub* AB, BC, *bis, duplum quadrati rectæ* AC. *Et proinde rectangulum ſub* AB, BC, *ſemel, æquale quadrato rectæ* AC. c *Quare vt prius erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB: *ideoq; AB, in C, ſecta erit extrema ac media ratione.* b 7. ſecundi. c 17. ſexti.



EX *Franciſco Maurolyco demonſtrabimus quoque theorema, quod ſequitur.*

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur quadrati; Et ſi recta linea inæqualiter ſecetur, totaque aſſumens minus ſegmentum poſſit quintuplum eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati: Recta

illa linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt.

a 8. ſecundi. *SIT primum recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum eſſe quadrati ex AC, maiore ſegmento.* a *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* b

b 17. ſexti.



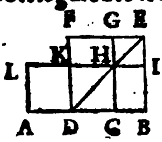
Rectangulum autem ſub AB, BC, æquale eſt quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, ſint continuè proportionales) erit rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, AC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC: Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde recta AB, ſecta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis, ſitq; quadratum ex AD, quadrati ex AC, maiori ſegmento quintuplum. Dico AB, in C, ſectam eſſe extrema ac
c 8. ſecundi. *media ratione.* c *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc eſt, rectangulum ſub AB,*
d 17. ſexti. *BC, æquale quadrato ex AC.* d *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

11. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea.

SECETVR rectā AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentū AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori ſegmento AC. Dico rectā BD, ſecari in A, extrema ac media



ratione, eſſeq; maius ſegmentum AB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipſi BE, parallela CG, ſecans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipſi BD, parallela IK, & ex D, du-

catur

tatur ipſi AF, parallela DL, occurrens ipſi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib 2. & K, IO, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; a Erit rectangulum IF, contentum ſub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. a 17. ſexti.
b Eſt autem CK, ipſi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi AL: b 36. primi.
additoque communi BK, erit rectangulum BL, contentum ſub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB: c Ac proindeerit vt BD, c 17. ſexti.
ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AB.

ALITER. Quoniam eſt vt AB, ad AC, hoc eſt, ad AD, ita AC, ad CB: Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad DA: & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, opponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum AB, minus autem ſegmentum AD, & ex maiori ſegmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori ſegmento AD. Dico maius ſegmentum AB, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cum ſit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD, d erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æ- d 17.
quale quadrato BF, rectæ AB: & ablato communi BK, erit AL, æqua- ſexti.
le ipſi IF: e Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF, e 36 pri
contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC: f Ac proinde erit vt mi.
AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C, extre- f 17. ſe-
ma ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt AC, minus vero ſe- xti.
gmentum recta CB. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Quoniam eſt vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB; g erit quo- g 19.
que ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius quinti AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc eſt, vt AB, ad AC: Ac propter-

ea diuiſa erit AB, *in* C, *extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

RVRSVS & hoc demonſtrabimus, quod ſequitur.

SI linea ſecetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti: Erit quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, *extrema ac media ratione in* C, *ſitque* DE, *dimidium totius, &* DF, *dimidium maioris ſegmenti* AC. *Dico*



DE, *in* F, *ſecari extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum eſſe* DF. *Cum enim ſit vt* AB, *tota ad* DE, *totam, ita* AC, *ablata ad* DF, *ablatam, cum vtrobique ſit proportio dupla:* a *erit quoque reliqua* CB, *ad reliquam* FE, *vt tota ad totam. Ac proinde &* CB, *dupla erit ipſius* FE. b *Quoniam vero eſt, vt* AB, *ad* AC, *ita* DE, *dimidia illius, ad* FE, *dimidiam huius; Eſt autem ex defin. linea ſecta extrema ac media ratione,* AB, *ad* AC, *vt* AC: *ad* CB: *erit quoque* DE, *ad* DF, *vt* DF, *ad* FE: *Ac proinde ex eadem defin.* DE, *ſecta erit in* F, *extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

a 19. quinti. b 15. quinti.

61.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumq; ſegmentorum AC, CB, eſſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori ſegmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. c Quoniam igitur



quadratum rectæ CD, quintuplum eſt quadrati rectæ AD: habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. d Quare commenſurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD: proptereaque ipſæ rectæ CD, AD, commenſurabiles quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem AD, Rationalis, cum ſit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent porportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) e erunt

c 1. tertijdec. d 6. dec. e 9. dec.

rectæ

rectæ CD, AD, longitudine incommenſurabiles: Ac proinde
Rationales potentia tantum comēnſurabiles. Quare ſi ex CD,
Rationali detrahatur AD, Rationali potentia tantū commen-
ſurabilis: *a* erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apo- a 74.
tome. decimi.

RVRSVS applicata ad AB, rectangulo AE, contento ſub AB,
CB; cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, *b* erit rectangulum AE, b 17. ſe-
æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apoto- xti.
mæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum ſecundum li
neam Rationalem AB, *c* facit alterum latus BE, hoc eſt rectam c 98. de-
CB, illi æqualem, Apotomē primam. Si recta ergo linea Rationa- cimi.
lis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demon-
ſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

*SIT recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C, ſitq; maius
ſegmentum AC, linea Rationalis; Dico minus ſegmentum CB, eſſe A-
potomen. Diuiſa enim AC, bifariam in D: erit CD, dimidia ipſius Ra-
tionalis AC, Rationalis, cum ſit ipſi AC, commenſurabilis. d Quoniam* d 3. ter-
autem quadratum rectæ BD, quintuplum eſt quadrati rectæ CD; ha- tijdec.
bebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem,



quam numerus ad numerum: e ac propterea commen- e 6. dec.
*ſurabilia exiſtent. Quare & ipſæ rectæ BD, CD, com-
menſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum igitur CD, ſit Rationalis,
erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD,
non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum
quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24 lib. 8. Habent enim propor-
tionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine in-
commenſurabiles. Ac proinde ſi à Rationali BD, detrahatur CD,
Rationalis potentia tantum commenſurabilis; f erit reliqua CB, Irra-* f 74.
tionalis, quæ vocatur Apotome. decimi.

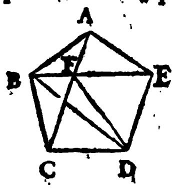
THEOR. 7. PROPOS. 7. VII.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui pri-
mum deinceps ſint, æquales A, B, C. Dico ipſum pentagonū eſſe

æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD: & ex puncto F, vbi ſe interſecant rectæ BF, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; *a* erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; *b* Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia ſint oſtenſa latera BE, BD: Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi: *c* Erit & baſis BE, baſi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales ſint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; *d* erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera AF, ED, trianguli FED, æqualia ſint lateribus FC, CD, trianguli FCD: & baſis communis FD; *e* erunt & anguli dictis lateribus contenti GED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD: Ac proinde cum angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE: erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

a 4. pri.
b 5. pri.



c 4. pri.
d 6. pri.
e 8. pri.

SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD: & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi: *f* Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales: *g* Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE: erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratū eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandū.

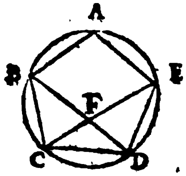
f 4. pri.
g 5. pri.

41.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæc extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, ſe



CE, ſe mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maioraque earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni. a Deſcripto enim circulo circa pentagonum; b erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera ED, DB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus DC, CB, trianguli DCB; & anguli quoq; ipſis contenti æquales, ex hypotheſi: c Erunt & baſes DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales: ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, ſint æquales, d & ipſis æqualis ſit externus angulus BFC; erit angulus BFC, duplus anguli DCE: e Eſt autem & angulus BCE, eiuſdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, ſit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales ſunt: f Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. g Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus inſiſtentes æquales ſunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD. h Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. i Quare erit vt BD, ad DC, hoc eſt, ad BF, æqualem ipſi DC, ita CD, hoc eſt, ſibi æqualis BF, ad FD: Ac propterea BD, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum DF, lateri pentagoni æquale, vt oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam CE, ſecari in F, extrema ac media ratione, maiuſque illius ſegmentum EF, æquale eſſe lateri pentagoni DE. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.

a 14. quarti.
b 28. tertij.
c 4. primi.
d 32. primi.
e 33. ſexti.
f 6. primi.
g 27. tertij.
h 32. primi.
i 4. ſexti.

SCHOLIVM.

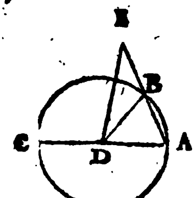
FACILE etiam demonſtrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ſubtendit, parallelam eſſe oppoſito lateri: hoc eſt, BD, parallelam eſſe lateri AE, & CE, lateri AB. Deſcripto enim circulo circa pentagonum. k Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales ſunt; Sunt autem A, & ABC, inter ſe æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus ſint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales: l ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.

k 22. tertij.
l 28. primi.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.

IN circulo ABC, ſit latus decagoni AB, cui in rectum adda-



tur BE, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inſcripti. Dico EA, rectam ſectam eſſe in B, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum eſſe EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diametra AC. coniunganturq; rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, eſt decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus ſemicirculi arcum AB, quin-
a 33. ſex. quies: Ac proinde arcus BC, quadruples erit arcus AB. a Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rurſus quia latera BD, BE, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni: (eſt enim BE, latus hexagoni ſemidiametro BD, æquale, ex coroll. propoſ.
b 5. pri. 15 lib. 4.) b erunt & anguli BDE, BED, æquales: c quibus cum
c 32. primi. æqualis ſit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: d Eſt autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æ-
d 5. pri. qualitatem laterum DA, DB Igitur & angulus BAD, duplus erit angul. BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, ſimul qua-
e 32. primi. drupli erunt anguli BED. e Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis ſit externus BDC, erit angulus BDC, quadruplus eiuſdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, oſtenſum fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales ſunt anguli AED ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æqua-
f 32. pri. les ſint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD, f erunt
g 4. ſex. triangula ADE, ABD, æquiangula. g Igitur erit vt EA, ad AD, hoc eſt, ad EB, ipſi AD æqualem, ita AD, hoc eſt, EB, ſibi æqualis ad BA: Atq; idcirco recta EA, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum EB, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.

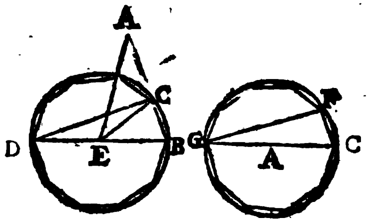
SCHOLIVM.

QVIA verò demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum lineæ diuiſa extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur, maius ſegmentum ſecari quoq; extrema & media ratione, eiuſq; ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

CONVERSVM quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonſtrabimus Videlicet. 81

SI linea diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentū latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT *enim* AB, *diuiſa in* C; *extrema & media ratione, ſitque primum* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Dico minus ſegmentum* CB, *eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim* BC, *in circulo, ita vt* CA, *extra circulum cadat. Et ducta ex* B, *per centrum* E, *diametro* BED, *connectantur rectæ* EA, EC. *Quia ergo eſt, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB: *& eſt* AC, *latus hexagoni æquale ſemidiametro* EB, *ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt* AB, *ad* BE, *ita* EB, *ad* BC, a *ideoque triangula* ABE, EBC,

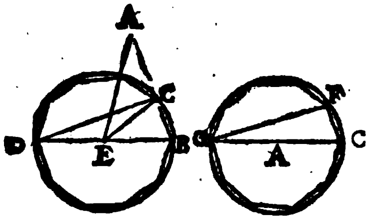


a 6. ſex.

æquiangula erunt, cum habeant latera circa communem angulum B, *proportionalia: eritque angulus* A, *angulo* BEC, *æqualis. Rurſus quia latera* CA, CE, *æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* b *erunt anguli* CAE, CEA, *æquales;* b 5. pri.
quibus cùm æqualis ſit externus BCE, *erit* BCE, *duplus anguli* A: d c 32.
Eſt autem angulo BCE, *angulus* CBE, *ob æqualitatem laterum* EB, primi.
EC, *æqualis Igitur &* CBE, *duplus erit anguli* A; *Ac proinde duo an-* d 5. pri.
guli BCE, CBE, *ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli* A. e *Cùm ergo* e 32.
angulis BCE, CBE, *æqualis ſit externus* CED; *erit quoque angulus* prima.
CED, *eiuſdem anguli* A, *& propterea anguli* BEC, *qui æqualis oſtenſus eſt angulo* A, *quadruplus.* f *Quare & arcus* CD, *quadruplus erit* f 33. ſex.
arcus BC; *Ac proinde arcus ſemicirculi* BCD, *eiuſdem arcus* BC, *quintuplus exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus* BC. *Quapropter recta* BC, *latus eſt decagoni.*

SIT *deinde* CB, *minus ſegmentum, latus decagoni circuli* BCD. *Dico maius ſegmentum* AC; *eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus* BC, *in circulo* BCD; *ducaturque diameter* BED: *Deinde interuallo* AC, *deſcribatur circulus* CFH, *cuius diameter* CAG; *eritque ex coroll propoſ. 15 lib. 4.* AC, *latus hexagoni circuli* CF. *Quoniam igitur* AB, *ſecta eſt in* C, *extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum* AC, *latus hexagoni circuli* CFG: *erit vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum* CB, *latus decagoni eiuſdem circuli* CFG, *Deſcribatur ergo in circulo* CFG, *decagonum æquilaterum, & æquiangulum* CFG: *Item in circulo* BCD: *decagonum æquilaterum, & æquiangulum* BCD: *eruntque latera* BC, CF, *inter ſe æqualia. Quoniam verò,*

ſi con-



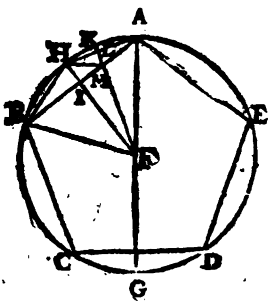
ſi connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoque anguli BCD, CFG, in ſemicirculis

a 31. tertij. *æquales, a nimirum recti: b Erunt quoque latera BD, CG, inter ſe*
b 26. primi. *æqualia. Quamobrem cum diametri BD, CG, ſint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde cum recta AC, ſit latus hexagoni circuli CFG, erit quoque eadem recta AG, latus hexagoni circuli BCD. Quod eſt propoſitum.*

K. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

In circulo ABCDE, cuius centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vna cum quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I: eritque recta AH, latus decagoni, & AF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, ſecans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM.



c 27. tertij. Quoniam igitur arcus AH, BH, æquales ſunt; c erunt & anguli ipſis inſiſtentes AFH, BFH, æquales. Quare cum latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia ſint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipſis contenti æquales quoque;
d 4. primi. d erunt & baſes AI, BI, æquales & anguli AIF, BIF, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualibus AB, DG, ABDG, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquentur arcus CG, DG, inter ſeſe æquales, ideoque erit arcus CG, dimidium arcus CD. Eſt autem & arcus AH, dimidium arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales ſint: eruntquoque

eorum

eorum dimidii arcus CO, AH, æquales; Ac proinde cùm arcus AH, duplus ſit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiuſdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales ſunt, & eſt arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, eiuſdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquè multiplices ſunt, nempe dupli, arcuum HK, BH: *a* Ac propterea totus arcus BG, duplus quoq; erit totius arcus BK, *b* & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: *c* Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus eſt quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; *d* Ac propterea triangula ABF, FBM, cùm habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; *f* ideoque rectangulum ſub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 1. quinti.
b 33. ſexti.
c 20. tertij.
d 32. primi.

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia ſunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipſis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & baſes AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: *h* Eſt autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia ſint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. *k* Quamobrem erit vt AB, ad AH, ita AH, ad HM; *l* ideoque rectangulum ſub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, ſimul æqualia ſunt quadratis rectarum BF, AH. *m* At vero rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, æqualia ſunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 4. ſex.
f 17. ſex.
g 4. primi.
h 5. primi.
i 32. primi.
k 4. ſex.
l 17. ſexti.
m 2. ſecundi.

COROLLARIVM I.

(HINC ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam biſariam, diuidere quoq; rectam illi arcui ſubtenſam biſariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam FH, propterea quòd arcum AB, diuidit biſariam, diuidere quoque rectam AB, biſariam in I, & ad angulos rectos. Eademq; in cæteris eſt demonſtratio.)

COROLLARIVM II.

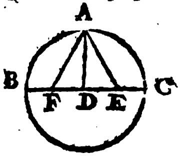
(PERSPICVVM quoq; eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductum diuidere & arcum, quē latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum biſariam, & ad angulos rectos: Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, biſariam. Quare ex præfato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoq; latus

CD, bi-

CD, biſariam & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in quolibet polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum deſcribitur, eiuſq; demonſtrationem in huius locum diſtulimus; paucis nunc à nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, *cuius centrum* D *Ducta autem diametro* BC, *erigatur* DA, *perpendicularis ad* BC. *Deinde diuiſa ſemidiametro* CD, *biſariam in* E, *ducatur recta* EA, *cui æqualis abſcindatur* EF, *adiungaturque recta* AF. *Dico rectam* AF, *eſſe latus pentagoni, &* DF, *latus decagoni. Cum enim* CD, *ſecta ſit biſariam in* E, *eique addita* DF, a *erit rectangulum ſub* CF, DF, *vna cum quadrato rectæ* DE, *æquale quadrato rectæ* EF, *ideoque quadrato rectæ* EA, *quæ ipſi* EF, *eſt æqualis.* b *Eſt autem quadratum rectæ* EA, *æquale quadratis rectarum* AD, DE. *Igitur rectangulum ſub* CF. DF, *vna cum quadrato rectæ* DE, *æquale eſt quadratis rectarum* AD, DE: *Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ* DE, *relinquetur rectangulum ſub* CF, DF, *æquale quadrato rectæ* AD, *hoc eſt, quadrato rectæ* CD. c *Quamobrem erit vt* CF, *ad* CD, *ita* CD, *ad* DF, *proptereaque recta* CF, *diuiſa erit in* D, *extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmentum* CD, *ſit latus hexagoni circuli* ABC, *ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum* DF, *latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib.* d *Rurſus quoniam quadrato lateris hexagoni* AD, *vna cum quadrato lateris decagoni* DF, *æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli;* e *Eſt autem eiuſdem quadratis rectarum* AD, DF, *æquale quadratum rectæ* AF: *erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ* AF: *ac propterea recta* AF, *lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.*



a 6. ſec.

b 47. primi.

c 17. ſexti.

d 10. tertijdec.

e 47. primi.

XII.

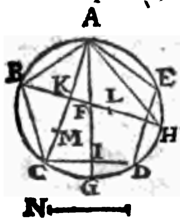
THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem; deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, eſſe lineam Irrationalē, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrū F, diametri AG, BH, ſecetq; AG, latus CD, in I. connectanturq; rectæ AC, AH, quarum AC, ſecet diametrum BH, in

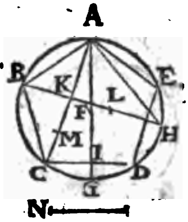
K. Ab-

K. Abſcindatur quoq; ex ſemidiametro FH, quarta eius pars FL: Item ex recta AC. quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis: erunt quoque FL, BF, illi commenſurabiles: cum ſint eius partes aliquotæ, Rationales: Atque idcirco & tota BL, compoſita, *a* cum ſit commenſurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit. *a 16. decimi.*



RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta ſecat arcum AC, bifariam in B: ſecabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariã, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo ACI. AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, *b* æquiangula inter ſe erunt. *c* Quamobrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, ſiue ad FH, ipſi FA, æqualem. *d* Vt autem CA, ad FH, ita eſt CM, quarta pars ipſius CA, ad FL, quartam partem ipſius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc eſt, vt CD, dupla ipſius CI, ad CK, duplam ipſius CM, ita FK, ad FL; Atque componendo, vt CD, CK, ſimul ad CK, ita FK, FL, ſimul, nimirum recta KL, ad FL; *e* Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compoſitæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia verò ſi AC, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) *f* maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi CD; *g* Erit quadratum rectæ compoſitæ ex CD, maiori ſegmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, *h* ideoque quadratum rectæ KL, commenſurabile erit quadrato rectæ FL: Ac proinde rectæ KL, FL, comenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia; Eſt autem FL, oſtenſa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit. *b 32. primi.* *c 4. ſexti.* *d 15. quinti.* *e 22. ſexti.* *f 8. tertijdec.* *g 1. tertijdec.* *h 6. deci.*

DEINDE quia qualium partium 4. eſt BF, talium 1. eſt FL; ac propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratum rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. *i* habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. eſt quadratum rectæ FL, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25 eſt quadratum rectæ BL, talium 5. eſt quadratum rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionẽ non habent, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum, *i 20. ſexti.*



dratum (vt patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) a 9. dec. a Erunt rectæ BL, KL, longitudine incommenſurabiles: ideoq; cum oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali BL, dematur Rationalis KL, potentia tantum commenſurabilis; b 74. decimi. b erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, cui vero congruens erit KL.

IAM vero recta BL, poſsit, plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum KL, & N: Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ BL, talium 1. fuit quadratum rectæ KL. Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportio-
c 6. dec. nem habebunt, quam numerus ad numerum. c Quare commenſurabilia erunt: proptereaque rectæ ipſæ BL, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem BL, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N Quia vero quadrata rectarum BL, & N proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quod
d 9. dec. proportio eorum ſit, quæ 5. ad 4.) d Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis longitudine ſit commenſurabilis Rationali BH: (Qualium enim partium 8. eſt BH, talium 5. eſt BL,) poſsitque plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt: Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

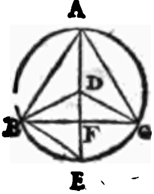
POSTREMO quia recta AB, eſt media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (quod triangulum ABH,
e 31. ter. e habeat angulum BAH, rectum, à quo ducta eſt AK, ad baſin
f 17. ſex. perpendicularis.) f erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo ſub BH, BK. Quocirca cum ſuperficiem contentam ſub Ratio-
g 95. decimi. nali BH, & Apotoma quarta BK, poſsit recta linea AB: g Erit AB, linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habentem diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN cir-

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum eſſe, quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex coroll. 2. propoſ. 10 huius lib. arcum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariã quoq;, & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus BC, ſit tertia pars totius peripheriæ: erit arcus BE, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoq; coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. li. 4. Quod etiã ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli: arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus BE, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta BE, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4.



a Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum AB, BE, b quod angulus ABE, in ſemicirculo rectus ſit: Eſt autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla ſit lineæ BE: erunt quadrata rectarum AB, BE, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ BE: Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum eſt quadrati rectæ BE, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 47. primi
b 31. tertij

COROLLARIVM. I.

(SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cum latus AB, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri AD, poſito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex ſcholio propoſ. 4. li. 2. quadruplum eſt quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.



ET quia ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. vt eſt AE, ad AB, ita ſe habet AB, ad AF; erit quoq; latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad baſim demiſſa potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.)

COROLLARIVM II.

(HINC facile etiam colligi poteſt, ſemidiametrum DE, bifariam ſecari in F, à latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplũ ſit quadrati rectæ BE; ſi ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. c Eſt autem quadratum rectæ

c 47. primi

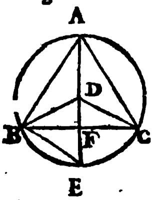
BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partiũ 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Eſt autem talium partium 3. quadratũ rectæ BF (quod quadratum rectæ AB, quadruplum ſit quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt enim AB, dupla ipſius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratũ rectæ BE, hoc eſt, quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta DE, dupla erit ipſius FE. Quocirca DE, bifariam ſecatur in F.)

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito:

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum BAC, & latus BC, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE ſecari à latere BC, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; cum latera AB, AD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli CAD; & baſes BD, CD, æquales quoq; : a Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod eſt primum.



a 8. primi.

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia ſint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi: b Erunt & baſes BF, CF, & anguli ad F, æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.

b 4. primi.

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonſtrati ſint eſſe æqua-
c 26. tertij. *les; c erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BEC, arcus ſit tertia pars circumferentiæ, erit BE, ſexta pars eiuſdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque ſemidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. pro-*
d 5. primi. *poſ. 15. lib. 4. d Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales ſunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; e Erunt & latera DF, EF, æqua-*
e 26. primi. *lia. Quod eſt tertium.*

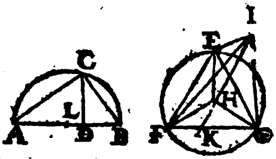
XIII.

PROBL. 1 PROPOS. 13.

PYRAMYDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

SIT

SIT datæ ſphæræ diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AD, ipſius DB, dupla; at vero AB, eiuſdem DB, tripla; & ipſius AD, ſeſquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, conectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis ſit ipſi DC, deſcribatur circulus EFG, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inſcribatur EFG, adiunganturq; rectæ HF, HG, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi DC, cum æquales ſint ipſi HE, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis FEG; IEF, IFG, IEG, eſſe Pyramidem, ſiue Tetraedrum.



Quoniam enim latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipſis contenti, recti ex hypotheſi, & 3. defin. 11. a erit baſis AC, baſi IE, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam AC, æqualem eſſe rectis IF, IG. *a 4. primi.* Rurſus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales ſunt ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt AD, ad DC, ita quadratum rectæ AD, ad quadratũ rectæ DC; & componendo, vt AB, ad DB, ita quadrata rectarũ AD, DC, ſimul ad quadratũ rectæ DC: b Sunt autẽ quadrata rectarũ AD, DC, æqualia quadrato rectæ AC *b 47. primi.* Igitur erit quoq; vt AB, ad DB, ita quadratũ rectæ AC, ad quadratũ rectæ DC: Ac proinde cum AB ſit ipſius DB, tripla, erit quoq; quadratũ rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis ſit ipſi DC: c Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ HE. *c 12. tertij.* Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit: & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum recta AC, oſtenſa quoq; ſit æqualis rectis IE, IF, IG: erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI. æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu, Tetraedrum, cuius baſis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter AB: & diametrum ſphæræ AB, potentia ſeſquialteram eſſe lateris EF, vel AC.

EXTENDATVR perpendicularis IH, vſq; ad K, vt ſit HK, ipſi DB: & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres IH, HE, HK: erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cum HE, ſit ad IK, perpendicularis & media proportionalis inter IH, HK; ſemicirculus circa IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HE, tranſibit per E, vt mox oſtendetur: Eodemque

argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem IK, deſcriptus in plano rectarum IK, *HG, per* G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutũ Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

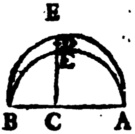
QVONIAM verò tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, talium 2. ſit AD. Igitur & quadratum rectæ AB, ſeſquialterum erit quadrati rectæ AC: Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum



tranſire per D. Nam ſi tranſeat circa D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, æquale erit rectangulo ſub

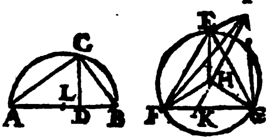
à 17. ſexti. *AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.*

HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum

ſcriptum circa IK, in plano rectarũ IK, HE, tranſire per E, cum HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

(HINC facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſin pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratum rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratum rectæ HE, a quod quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. a 12. tertijdec. *Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE: Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cum proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2.*



COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ACB, eritq; L, centrum quoq; ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis: cum AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB: Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.)

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totam ſoliditatem. Hanc verò praxin, & ſequentes quatuor, quibus re-



E qua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex alberto Durero non ignobili ſcriptore.

XV. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris iſtius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter A B, circa quam ſemicirculus deſcribatur A C B, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque
a 4. pri. rectæ AC, BC, a quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta E F, quæ æqualis ſit ipſi A C, vel B C, deſcribatur ſuper eam quadratum E F G H, in quo ducantur diametri E G, F H, ſe mutuo ſecantes in I: eruntque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales; cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratum eſt. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi I E; Et deniq; ex K. & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH: LFE, LEH, KHG, LFG, eſſe octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera E I, I K, trianguli E I K, æqualia ſunt lateribus FI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, recti; (ipſe quidem EIK, ex defin. 3.
b 8. pri. lib. 11. At vero EIG, b eo quod ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, I H, G I, I H, & baſium E H.
c 4. pri. G H,) c Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemque modo eidem E H, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit K E H. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeo æqualia triangulo K E H, cum illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati E F G H, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis conſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.

QVONIAM enim I E, perpendicularis eſt ad K L, ex 3. defin lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta K I, IL: (quod tres rectæ K I, I E, I L, æquales ſint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, deſcriptus tranſibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propoſitionis. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem K L, in plano rectarum K L, I F, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G, H. Igitur quilibet horum

ſemi-

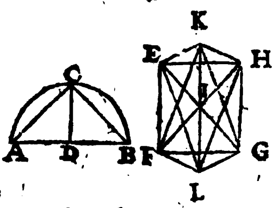
ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphæram, quæ complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc (phæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB; (Nam cum rectæ AC, EF, æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent) comprehendetur idem octaedrum data ſphæra.

QVIA vero quadratum rectæ AB, a æquale eſt quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia ſunt: erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaq; octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum. a 47. primi.

COROLLARIVM I.

(EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæra: quales ſunt KL, EG, FH, ſecantes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atq; proinde, cum IK, recta ſit ad lineas EG, HF: b recta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductum: c Ideoq; ad plana KELH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Imò eadem ratione, vt paucis rem complectar, erit tria plana EFGH, KELH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt: Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantq; angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterum octaedri FK, KH. d Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus ſit. Eademq; eſt ratio de cæteris angulis.

b 4. vndecimi. c 8. vndecimi. d 48. primi.



COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines deniq;, ſemidiametri IK, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

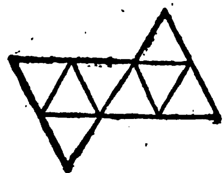
COROLLARIVM. III.

(SI tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim qua-
a 13. tertijdec. *dratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. a Quoniã igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ.*
b 14. tertijdec. *b Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri ſphæræ. Igitur cum talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.)*

COROLLARIVM. IV.

(DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ
c 15. vndecimi. *FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: c Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.)*

SCHOLIVM.

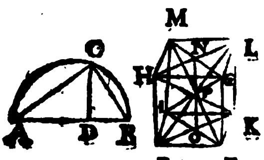


QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturq́ue, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſeſe complicatis componetur octaedrum ſecundum totã ſoliditatẽ, vt ait Albertus Durerus.

XIV. PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM conſtituere: & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratũ conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoq; ipſi BC, quarũ extrema coniun-



d 6. vndecimi. gantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniã ergo rectæ EI, FK, ad planum EF, GH, rectæ ſunt; d erũt rectæ EI, FK, parallelæ. Sunt autẽ

& æqua-

& æquales, quod vtraq; æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. a Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammum eſt EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: b Sunt autē & omnes quatuor anguli recti, cū EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratū erit, c cum ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, d quod eius plana oppoſita ſint parallela, nimirū per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorū oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HI, per quas ducantur plana EKLH, FIMG, e Quia igitur tam planum EKLH, quam FIMG, cubum bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdē propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea cōmunis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EKLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cum enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; f perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11 Rectus ergo angulus eſt HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec non & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 24. lib. 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur.

a 33. pr.
b 34. pri.
c 24. vndec.
d 15. vndec.
e 28. vndec.
f 4. vndecimi.

CVM quadratum rectæ EK, g æquale ſit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc eſt, quadrati rectæ KL; Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. h Eſt autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, ſit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc eſt, quadrati rectæ BC: At vero eiuſdem quadrati rectæ BC, triplum eſt quadratū rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales ſunt ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. li. 6 vt eſt AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo

g 47. primi.
h 47. primi.

AB, ipſius BD, ſit tripla. erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum. Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt: ac propterea ipſæ rectæ EL, AB, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarum ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri EL, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL, manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtū eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeq; mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atq; eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeq; mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML: EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP

a 29. primi. *æquales ſunt duob. angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ*

b 16. vn decimi. *ſunt, cum ſint communes ſectiones planorū parallelorum EFKI, GHML, c & angulus OPF, æqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem*

c 15. pri. *& latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademq; eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.*

COROLLARIVM II.

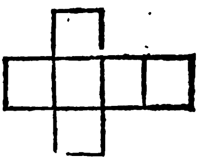
RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis

d 13. tertijdec. *laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. d Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri: e*

e 15. tertijdec. *Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorū laterū. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrum ſphæ-*

f 47. primi. *ræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero BC, f Perſpicuum autem eſt, diametrum ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.*

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturq; vt hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſeræ cuiuſpiam, vt conſtat.

ICO-

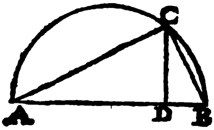
PROBL. 4. PROPOS. 16. XVI.

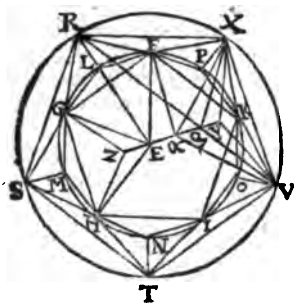
ICOSAEDRVM conſtituere: & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: Et ex AB, abſcindatur quinta pars BD, vt AB, ipſius BD, ſit quintupla; & ipſius AD, ſeſquiquarta: At vero AD, ipſius BD, quadrupla. Deinde ducta CD, perpẽdiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E: *a* in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hæc diuiſis arcubus FG, GH, HI, IK KF, biſariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur ſemidiametro, EF, ſeu rectæ BC. Eruntque omnes inter ſe æquales: *b* ſed & parallelæ ſunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR. EM, QS: EN, QT: EO, QV: EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confuſionem, non duximus) *c* binæ inter ſe æquales erunt: Ac proinde cum æquales ſint EL, EM, &c. ſemidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter ſe, & ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC, *d* Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto, eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum: nec non planum per QV, QX, & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano: Ac proinde ſi ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V; X, tranſibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. *e* Quia igitur LR, PX, æquales, & parallelæ: ſi concipiatur duci recta LP; *f* erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ: *g* Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufer autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorſus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST,

a 11. quarti.
b 6. vndecimi.
c 33. primi.
d 15. vndecimi.
e 6. vndecimi.
f 33. primi.
g 28. tertij.

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum eſt RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK. rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt lateri hexagoni circu-
a 10. ter li FGHIK, & eſt LF, latus decagoni; a erit quadratum lateris
tij dec. pentagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF;
b 47. primi. b Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratū rectæ FR; quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriuſque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia; cum eorū omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri.





Poſt hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, ſintque rectæ QY, EZ, æquales ſingulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, ſemidiameter eſt circuli RSTVX, hoc eſt, latus hexagoni, & QY, latus eſt decago-
c 10. ter ni eiuſdem circuli; c erit quadratū lateris pentagoni XV, æquale
tij dec. quadratis rectarum QX, QY; d Eſt autem eiſdem quadratis æ-
d 47. quale quadratū rectæ XY, quod angulus XQY, rectus ſit ex de-
primi. fin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela ſint oſtenſa, ſitque EQ ad illius planum recta, ex conſtructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale eſt quadrato rectæ XV, proptereaque recta XY. rectæ XV, æqualis. Eodemq; modo eidem XV, æqualis oſtendetur VY, Ac proinde triangulū VYX, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confuſionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT,

TYV,

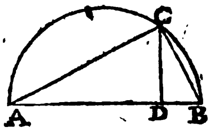
TYV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, priori-
bus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentago-
ni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum
EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & EZ, latus decago-
ni, anguluſque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non qua-
tuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas,
ne pareremus confuſionem, non duximus,) quæ omnia priorib.
quindecim æqualia erunt, eandẽ ob cauſam. Cum igitur omnia
hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturq;
ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorũ latera; conſti-
tutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico comprehendi ſphæra
diametri AB.

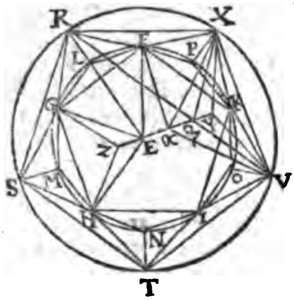
DIVISA enim recta EQ. bifariam in α, ducantur rectæ αF,
αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqua-
lia ſunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, ſint
ſemidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, α-
QX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & baſes αV, a 4. pri.
αX, æquales. Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex α, Q, ad R,
S, T, oſtendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter ſe, & ipſis
αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia
ſunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, ſint ſemidia-
metri circulorum æqualium, & EQ. diuiſa ſit bifariam in α: Sunt
autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3.
lib. 11. b Erunt quoque baſes αX, αF, æquales; eodemque modo b 4. pri.
ſi ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, oſtendentur αG, αH, αI,
αK, æquales ipſi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem
angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero
QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK: &
EZ, latus decagoni eiuſdẽ circuli: c erit QZ, diuiſa in E, extrema c 9. ter-
ac media ratione, maiuſq; ſegmentum erit QE. Quare minus ſe- tijdec.
gmentum ZE, aſſumens Eα, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt,
recta αZ, d quintuplum poteſt eius, quod ex Eα, deſcribitur, qua- d 3. ter-
drati: Poteſt autem & recta αF, quintuplum eiuſdem quadrati re- tijdec.
ctæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit qua-
drati rectæ αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit
ipſius Eα: Erunt quadrata rectarum EF, Eα, ſimul quintupla
quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æ- e 47.
quale ſit quadratum rectæ αF; erit quoque quadratum rectæ αF, primi.
quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia ſunt quadrata
rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipſæ αZ, αF, æquales erunt.
Cum igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (propterea quod ſi æqua-
libus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æ-
quales fiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos
Icoſaedri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum

ZY, ex

ZY, ex centro α per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphærã dico æqualem eſſe ſphæræ diametri *AB*.

a 15. *quinti.* b 22. *ſexti.* *a* CVM enim ſit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipſius αZ, ad QE, duplam ipſius αE; *b* Ac propterea vt quadratum rectæ αZ, ad quadratum rectæ αE, ita quadratũ rectæ YZ, ad quadratũ rectæ QE; ſit autem quadratum rectæ αZ, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ αE; erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc eſt, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis ſit poſita ſemidiametro EF, hoc eſt, rectæ BC; Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8 lib. 6. ſit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Ac proinde exiſtente AB, quintupla ipſius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC,) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia ſunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & ſphæræ circa ipſas, æquales erunt.





QVONIAM denique diameter ſphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendum eſt, latus Icoſaedri eſſe lineã Irrationalem, quæ Minor vocatur) poteſtq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc eſt, rectæ illi æqualis EF; erit quoque ſemidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. *c* erunt commenſurabilia; Ac propterea & rectæ AB. EF, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & EF, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, *d* Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrũ igitur conſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. Quod erat faciendum.

c 6. *decimi.* d 11. *tertiidec.*

COROL.

COROLLARIVM. I.

(EX dictis infertur, ſphæra diametrum eſſe potentia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutum eſt, & qui per quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum enim eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati recta BC. hoc eſt, ſemidiametri EF.)

COROLLARIVM II.

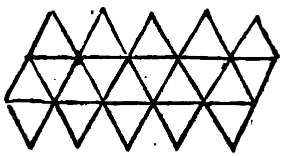
(ITEM manifeſtum eſt, ſphæra diametrum eſſe compoſitã ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli: Nam YZ diameter ſphæra componitur ex EQ. latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagóni circuli FGHIK.)

COROLLARIVM. III.

(CONSTAT denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela. Nam recta RX, oſtenſa eſt parallela recta, qua ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem recta LP, ſit quoque parallela recta HI, vt in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus; (eo quod æquales ſunt arcus HL, IP: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentia,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas: Eademque eſt ratio de cæteris lateribus oppoſitis.)

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icoſaedrũ, ſecundũ totã ſoliditatẽ, ſi rite inter ſeſe aptentur.



PROBL. 5. PROPOS. 17.

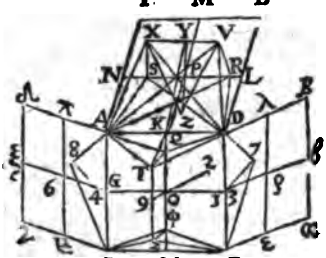
XVI.

DODECAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonſtrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna baſis cubi data ſphæra comprehenſi, quadratum ABCD, cui inſiſtat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt ſit cõmunis horum ſectio recta AD, (Inſiſtunt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedẽtibus, vt cubus conſtitueretur, erectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipſi baſi, EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15. huius lib. a Quare & baſes cubi per ipſas ductæ, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH.) Diuiſis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur ſecantibus ſeſe in O, P. centris quadratorum, vt conſtat ex demonſtratione octaui a 18. vndec.

proble-

Problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, VR, SX, æquales ſegmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX: Dico ATDVX, eſſe vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi. Quod enim pentagonũ ATDVX, ſit in vno plano, ita oſtendetur. Cum RV, SX, ſint ad quadratum ADEF, rectæ a ipſę erunt parallelæ: Ac proinde, cum ſint æquales, (quia ſegmenta maiora PR, PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ ſectæ PL, PN, æquales ſint. b) erunt quoque contingentes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ: c Eſt autem & AD, eidem RS, ſiue LN, parallela, eo quod AM, DL, parallelæ ſunt & æquales. d Igitur & AD, VX parallelæ ſunt: e Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodẽ cum ipſis erunt plano, ideoque trapezium ADVX, in vno exiſtet plano: Eſt autem triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio ADVX. Ex P, namque ducatur PY, parallela ipſi RV, f quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta ſit RV: Et connectantur rectæ KT, KY. Quoniam igitur eſt vt OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob ſectionem rectæ OK: Eſt autem KP, ipſi OK, æqualis; (ſunt enim dimidia latera cubi) & PY, ipſi OQ, (cum æqualis ſit ipſi RV, quæ poſita fuit æqualis ipſi OQ, maiori ſegmento;) Erit quoque vt KP, ad PY, ita OQ, hoc eſt, QT, illis æqualis, ad QK. Quare cum triangula PKY, QTK, duo latera habeãt duobus lateribus proportionalia, ſintque ad vnum angulũ K, compoſita, g ita vt homologa latera ſint parallela, nempe PK, & QT, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad quadratum ABCD; & PY, QK, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad quadratum ADEF: h Erunt reliqua latera KY, KT, in rectam lineam collocata, i Ac propterea recta TY, in vno erit plano, ideoque planum ATD, & planum ADVX, vnum planum conſtituent per rectas TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno exiſtit plano.



a 6. vndecimi.
b 33. pr.
c 33. pr.
d 9. vndecimi.
e 7. vndecimi.
f 8. vndecimi.
g 6. vndecimi.
h 32. ſexti.
i 1. vnd.

QVOD vero ſit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia ſint lateribus AK, KQ, trianguli AKQ (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, ſegmenta minora rectarum æqualium ſectarum) & anguli ANS, AKQ,

A K Q, recti; ſi ducatur recta A Q, *a* erunt baſes A S, A Q, æquales. Rurſus cum latera A S, S X, trianguli A S X, ſint æqualia lateribus A Q, Q T, trianguli A Q T. (Nam rectæ A S, A Q, oſtenſæ ſunt æquales, & S X, Q T, ſunt ſegmenta maiora rectarum æqualium ſectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3. lib. 11. *b* Erunt quoq; baſes A X, A T, æquales. Quod ſi ducatur recta D Q, oſtendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; ſi vero ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, eſſe æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V, æqualia: quibus etiam æquale oſtendemus reliquum V X, hac ratione. *c* Quadrata rectarum P N, N S, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ P S, hoc eſt, quadrati rectæ S X: Eſt autem quadrato rectæ P N, æquale quadratum rectæ A N. Igitur & quadrata rectarum A N, N S, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ S X. *d* Cum ergo quadratis rectarum A N, N S, æquale ſit quadratum rectæ A S; erit quoq; quadratum rectæ A S, triplum quadrati rectæ S X, Ac proinde quadrata rectarum A S, S X ſimul, quadrupla eiuſdem quadrati rectæ S X. *e* Eſt autem quadratis rectarum A S S X, æquale quadratum rectæ A X. Quadratum ergo rectæ A X, quadruplum quoq; erit quadrati rectæ S X, hoc eſt, quadrati rectæ P S, hoc eſt, quadrati rectæ X Y; *f* Sunt enim rectæ P S X Y, æquales. Cum igitur & quadratum rectæ V X, quadruplum ſit eiuſdem quadrati rectæ X Y, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod V X. dupla ſit ipſius X Y; Erunt quadrata rectarum A X, V X, æqualia; Ac proinde rectæ ipſæ æquales. Quare cum & X A, A T, T D, D V, oſtenſæ ſint eſſe æquales; æquilaterum eſt pentagonum A T D V X.

a 4. *primi.*
b 4. *primi.*
c 4. *tertii dec.*
d 47. *primi*
e 47. *primi.*
f 34. *primi.*

QVOD autem & æquiangulum ſit, ita perſpicuum fiet. Ductis rectis A R, A V; cum P N, ſecta ſit in S, extrema ac media ratione, eique addita P R, æqualis maiori ſegmento P S; *g* erit quoque N R; ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum erit N P. *h* Quadrata igitur rectarum N R, R P, ſimul tripla ſunt quadrati N P, hoc eſt, quadrati rectæ A N: Eſt autem quadratum rectæ R V, æquale quadrato rectę R P. Ergo & quadrata rectarum N R, R V, tripla ſunt quadrati rectæ A N; Ac proinde quadrata rectarum N R, R V, A N, quadrupla ſunt eiuſdem quadrati rectæ A N. *i* Sunt autem quadrata rectarum N R, A N, æqualia quadrato rectæ A R. Igitur & quadrata rectarũ R V, A R, quadrupla ſunt quadrati rectæ A N. *k* Cum ergo quadratis rectarum A R, R V, æquale ſit quadratum rectæ A V; Erit quoque quadratum rectę A V, eiuſdem quadrati rectæ A N, quadruplum. At vero eiuſdem quadrati rectę A N, quadruplum eſt quadratum rectæ A D ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod A D, dupla ſit ipſius A N. Æqualia igitur ſunt quadrata rectarum A V, A D, ideoque & rectæ A V, A D, æquales. Simili argumento, ductis rectis D S,

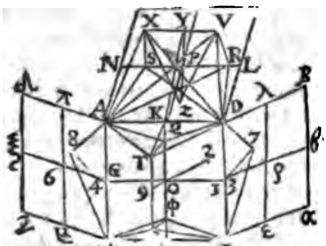
g 5. *tertii dec.*
h 4. *tertii dec.*
i 47. *primi.*
k 47. *primi.*

DX, oſtendemus DX, DA, æquales eſſe: ac propterea tres rectæ AD, AV, DX, inter ſe eſſe æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia ſunt lateribus DV, VX, trianguli DXV: & baſes AD, DX, æquales quoq;: a Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non ſecus oſtendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, b ipſum erit æquiangulum.

a 8. pri.

b 7. tertii dec.

Qvod ſi ſumantur alia duo cubi quadrata CαβD, BγδA, recta ad quadratum ABCD, in communibus ſectionibus CD, AB, quorum ſingula latera bifariam ſecentur in ε, θ, λ, I, μ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ρI, σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, QT, 37, 48, æquales ſegmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 4σ, coniunganturque rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonſtrabimus eadem ratione pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera eſſe & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Conſtructa igitur iam ſunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & ſibi mutuo cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera: conſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonſtrabimus.



Intelligantvr plana cubi oppoſita ſecari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam ſecantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppoſitum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppoſitum, planis per rectas GI, HK. ductis, &c. Quoniam igitur plana ſecantia recta ſunt ad dicta plana cubi, quod parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ ſunt ad plana ADEF, ABCD; c Erunt & communes eorum ſectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta ſit ad planum ADEF, ipſa producta verſus Z, erit communis ſectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto ſi ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis ρOZ; erit ipſa commu-

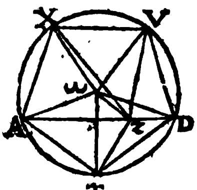
c 19. vndec.

communis ſectio planorum, quæ per rectas G I, H K, ducuntur. Quia vero dictæ communes ſectiones & diametri cubi ſe mutuo bifariam ſecant: ſecent ſe mutuo bifariam in Z: Secant autem ſe diametri cubi bifariam in centro ſphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propoſ. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit ſphæræ circa cubum deſcriptæ: Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter ſe æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; eſſe omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, ſic fiet perſpicuum, ducta recta Z X. *b* Quoniam parallelæ ſunt K P, O Z, quod vtraq; recta ſit ad planum A B C D: Item parallelæ ſunt O K, Z P, quod vtraque recta ſit ad planum A D E F: erit P K O Z, (debent enim duo puncta Z, intelligi eſſe coniuncta) parallelogrammum, ac propterea P Z, æqualis erit ipſi K O, hoc eſt, ipſi N P, dimidio lateri cubi: Eſt autem & P Y, ipſi P R, æqualis. Tota ergo Z Y, toti N R, æqualis erit. *c* Quare cum quadrata rectarum N R, P R, ſimul tripla ſint quadrati rectæ N P, quod N R, in P, ſecta ſit extrema & media ratione: erunt quoque quadrata rectarum Z Y, P Y, hoc eſt, quadrata rectarum Z Y, Y X, ſimul tripla quadrati rectæ P Z: (Eſt enim X Y, æqualis ipſi P S, hoc eſt, ipſi P Z:) *d* Eſt autem quadratis rectarum Z Y, Y X, æquale quadratum rectæ Z X. Igitur & quadratum rectæ Z X triplum erit quadrati rectæ Z P, hoc eſt, quadrati dimidii lateris cubi. At quia eiuſdem quadrati dimidii lateris cubi triplum eſt quoq; quadratum ſemidiametri ſphæræ cubum comprehendentis: (*e* Nam vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiameter ad dimidium lateris: *f* Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum ſemidiametri ad quadratum dimidii lateris. *g* Cum ergo quadratum diametri triplum ſit quadrati lateris, erit quoque quadratum ſemidiametri triplum quadrati dimidii lateris.) Æquale igitur eſt quadratum rectæ Z X, quadrato ſemidiametri ſphæræ, ſeu cubi: Ac propterea Z X, æqualis ſemidiametro. Eadem ratione erit ducta recta Z V, ſemidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera ZY, YX, trianguli Z Y X, æqualia ſint lateribus Z Y, Y V, trianguli Z Y V, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, ſit perpendicularis ad L N, erit quoque eadem ad ſibi parallelam V X, perpendicularis.) *h* Erunt baſes Z X, Z V, æquales: Sunt autem & Z A, Z D, ad angulos cubi, ſemidiametro ſphæræ æquales, vt dictum eſt. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro ſphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem oſtendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus A T D V X, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ

a 39. vndec.
b 6. vndecimi
c 4. tertiidec.
d 47. primi
e 15. quinti
f 22. sexti.
g 15. tertiidecimi.
h 4. pri.

perpendicularis demittatur Z ω, connectanturq; rectæ ω A, ω T ω D, ω V, ω X. a Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale eſt quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quod rectæ Z A, Z X, oſtenſę ſint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoq; rectæ ipſæ ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter oſtendentur rectæ ω V, ω D, & inter ſe, & ipſis ω A, ω X, æquales, quod & rectæ Z V, Z D, æquales ſint oſtenſæ rectis Z A, Z X. Quare cum ex ω, cadant in circũferentiam plures rectę lineæ æquales, quam duæ, b punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt quadratis rectarum Z ω, ω T. c Cum ergo illis duobus æquale ſit quadratum rectæ Z A; his vero quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; proptereaq; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare ſphæra complectens cubum ex centro Z, deſcripta comprehendet pentagonum quoque A T D V X; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem ſphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.

a 47. primi.



b 9. ter.

c 47. primi.

d 15. quinti.

e 6. tertii dec.

Postremo cum ſit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: d erit quoque vt N L, dupla ipſius N P, ad R S, duplam ipſius P S, ita R S, dupla ipſius P S, ad rectam compoſitam ex S N, R L, nimirum ad duplã ipſius S N. Si igitur cubi latus N L, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum erit S R; Sed N L, tota in ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratum commenſurabile eſt quadrato diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum ſit illius tertia pars huius) e Igitur maius ſegmentum S R, hoc eſt, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & prædictas figuras; & demonſtrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Cum ergo demonſtratum ſit; recta L N, extrema ac media ratione ſecta maius ſegmentum eſſe rectam R S. Sit autem L N, æqualis lateri cubi, R S, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti.

COROL-

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam A D, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum æquale rectis A V, D X, ſubtendentibus angulos X. & V, eiuſdem pentagoni.

QVONIAM vero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, a facit maius ſegmentum latus pentagoni: b ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmẽtum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ. a 8. tertii dec. b 5. tertii dec.

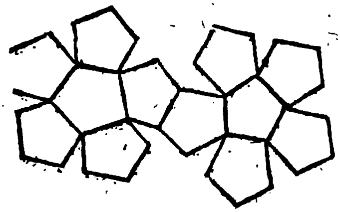
COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nã duo ex dictis lateribus ſunt V X, T Z, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi E F, A B: aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallela ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturq; ex demonſtratis, bifariam & ad rectos angulos à lineis rectis, quæ centra baſium cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ Y Z, 9 Z, &c. quæ vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ P Z, O Z, æquales ſint dimidio lateri cubi, & P, 9 O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus P S, O Q; Erunt totæ Z, 9 Z, æquales. Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, q; bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus eſt, cum opponatur recto O K P Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

COROLLARIVM IV.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadrata rectarum Z Y, Y P, tripla eſſa ſint quadrati rectę P Z: erit Z Y, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum erit P Z, ex ſcholio propoſ 4. huius lib. Ac proinde erit vt Z Y, ad Z P, ita Z P, ad P Y: c ideoque vt dupla ipſius Z Y, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius Z P, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplam ipſius Z P, ad duplam ipſius P Y, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. c 15. quinti.

SCHOLIVM.

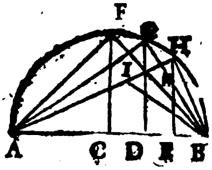


QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi ritè inter ſe complicentur.

xviij. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

SIT ſphæra diameter A B, quæ in C, ſecetur bifariam; In D, vero ita vt B D, ſit ipſius pars tertia: In E, denique ita, vt B E, ſit quinta pars eiuſdem. Deſcripto deinde circa A B, ſemicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipſa A B, perpendiculares C F, D G, E H: connectanturque rectæ A F, B F, A G, B G, A H, B H. Poſt hæc ex H A, abſcindatur H I, æqualis lateri Decagoni in eo circulo deſcripti cuius ſemidiameter, ſeu latus Hexagoni eſt B H, connectaturque recta B I. Poſtremo B C, ſecetur extrema ac media ratione in K, ſitque maius ſegmentum B K.



QVOD igitur attinet ad expoſitionem laterum prædictarum figurarum, dico A G, eſſe latus Pyramidis, ſeu Tetraedri: A F, latus Octaedri: B G, latus cubi: B I, latus Icoſaedri: B K, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim A G, media proportionalis eſt inter B A: A D, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Erit ex coroll propoſ. 20. eiuſdem lib. vt B A, ad A D, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A G: Eſt autem B A, ipſius A D, ſeſquialtera: cum talium partium 2. ſit A D, qualium 3. eſt B A Igitur & quadratum rectæ B A.
a 13. tertii decimi. ſeſquialterum eſt quadrati rectæ A G: a Ac proinde cum diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri: erit A G, latus Tetraedri.

RVRSVS quoniam A F, eſt media proportionalis inter B A, A C, ex eodem coroll propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde vt B A, ad A C, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A F, ex adducto coroll.
b 14. tertii decimi. propoſ. 20. libr 6. Eſt autem B A, ipſius A C, dupla: Erit quadratum rectæ A B, duplum quadrati rectæ A F. b Quare cum diameter

ſphæræ

ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

DEINDE cum BG, ſit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipſius BD, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. *a* Quocirca cum ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi. *a 15. tertii dec.*

PRÆTEREA quia, ex eiſdem corollariis, BH, eſt media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH; Eſt autem ex conſtructione AB, ipſius BE, quintupla; Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter ſphæræ potẽtia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis ex coroll. 1 propoſ. 16 huius lib. Erit BH, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli; Eſt autem HI, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. *b* Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, ſimul; Ac proinde *c* cum quadratum rectæ BI, æquale ſit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiuſdem. *d* Quam ob rem BI, latus eſt Icoſaedri. *b 10. tertij dec.* *c 47. pr.* *d 16. tertij dec.*

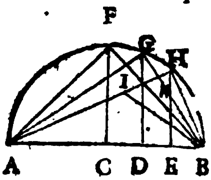
DENIQVE cum BG, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius ſegmentum latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratũ lateris Tetraedri: talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quam numerus ad numerum. *e* Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ ſunt commenſurabiles; atque adeo cũ diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt *e 6. dec.*

Diamet.	6.
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

a 9. dec. conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. *a* Erunt huiuſmodi lineæ, nimirum diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi; longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles.

At vero latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demõſtratum eſt nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum laterib priorum, cum latera priorum ſunt diametro ſphæræ cõmenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum, oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.



Sed neque inter ſe vllo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome, *b* erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor, *c* erit & latus Dodecaedri linea Minor, Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantum, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo, *d* quod latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

b 104. decimi.
c 106. decimi.
d 16. tertij dec.

Itaque quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphæræ, ideoque Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus, ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus deniq; Icoſaedri maius latere Dodecaedri; hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

Nam latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim A G, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quam A F, latus Octaedri; maior erit recta A G, quam A F, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3.

Eodem

EODEM modo non oſtendemus, latus Octaedri maius eſſe atere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac rte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit a 20. ſexti. quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet .3.9 Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt b 15. tertii dec. quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; c erit numerus, ad c 10. quinti. quem 9 habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectæ GD, maius eſt quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, maior quam recta BH. Rurſus quia diameter ſphæræ, AB, componitur ex BH, ſemidiametro circuli, ex quo Icoſaedrum conſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiuſdem circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. conſtat latus decagoni HI, maius eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt, minus recta BD. Nam ſi HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipſi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi BD; Atque adeo, cum quadratum rectæ AB, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectæ BD. erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod eſt abſurdum. quintuplum enim eſt demonſtratum. Non ergo HI, tertia pars eſt ipſius AB. Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI. dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipſius HI, maior quam duæ tertiæ, hoc eſt, quam AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis abſurdum. Non igitur maior eſt HI, tertia parte ipſius AB. Sed neque æqualis tertiæ parti, vt oſtendimus. Minor ergo eſt quam tertia pars, hoc eſt, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, maiores ſint rectis BH, HI, vt demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: d Eſt autem quadratum rectæ BG, æquale quadra- d 47. quinti. tis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis recta-

rum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoq; erit quadrato rectæ BI, Ac proinde recta BG. nempe latus cubi, *maior e*rit quam recta BI, latus ſcilicet Icoſaedri.

MAIVS denique eſſe latus Icoſaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, diuiſæ extrema ac media; ratione, maius ſegmentum ſit BK, & minus GK; erit rectangulum ſub BG, BK, maius rectangulo ſub BG, GK; atque adeo rectangula ſub BG, BK, & ſub BG, GK, ſimul maiora duplo re-
a 2. ſec. ctanguli ſub BG, GK: *a* Eſt autem rectangulis ſub BG, BK, & ſub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis ſub BG, GK, æqualia ſunt duo quadrata rectæ BK (Nam cum ſit, vt
b 17. ſexti. BG, ad BK, ita BK, ad GK; *b* erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo, ſub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis ſub BG, GK.) Maius igitur quoque eſt quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, ſex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ BH. (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum ſit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt ſex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnum quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale eſſet quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus: forent quinque quadrata rectæ BH, minora ſex quadratis rectæ BK. quod eſt abſurdum, cum illa quinque hiſce ſex maiora ſint demonſtrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta BK; Ac propterea cum BI, maior ſit quam BH, multo maior erit BI, latus videlicet Icoſaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum expoſuimus, & inter ſe comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

INTERPRETES *hoc loco demonſtrant, præter dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter ſe æqualibus, hac fere ratione.*

EX *duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.*

EX *tribus autem triangulis æquilateris, conſtat pyramidis angulus.*

EX *quatuor, Octaedri angulus.*

EX

EX quinque, angulus Icoſaedri:

EX ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus
ri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli æquilateri angu-
s contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propoſ. 32. lib. 1.
runt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc eſt,
unt quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus con-
ituetur. a Nam ſolidus omnis angulus minoribus quam quatuor re- a 20. vndecimi.
is angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis
iuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor au-
em quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti
uatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor eiuſmodi
ngulis, ſolidus angulus conſtabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dode-
aedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æ-
uales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde v-
nus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem v-
nius recti continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres
uintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideo-
que ex ipſis angulus ſolidus conſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi an-
gulis, nullus ſolidus angulus confici poteſt. Cum enim vnus, vt dictum
eſt, maior ſit recto, eo quod continet vnum rectum, & inſuper recti quin-
tam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus an-
gulus ſolidus ex ipſis conſtituetur; Ac propterea multo minus ex pluri-
bus, quam quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec
ſane ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis conſtitui poterit angu-
lus ſolidus. Nam cum ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt
ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum: ac proinde vnus angulus conti-
neat vnum rectum, ac præterea duas partes ſextas vnius recti: conti-
nebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc
eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo componetur angulus ſo-
lidus: Atque idcirco multo minus ex pluribus eiuſmodi angulis, quam
tribus, angulus ſolidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis.
Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpi-
cuum eſt, præter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe
conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus con-
tineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum pun-
ctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramis contenta
quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſoli-
dum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi com-
prehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum
angu-

angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrum viginti triangulis eiuſmodi contentam.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle, Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6 numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli. Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt ad angulum ſolidum conſtituendum, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3 numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4 numerum angulorum vnius quadrati,

fiunt

fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3 numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12 pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE *conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos: octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solidos Tetraedrum (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes, totidemque ſolidos angulos.*

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et ſolidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alii vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES *Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæra inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geometria verſatus, ſcite ac prudenter indi-*

ter indices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi adſcribuntur: Duo vero ſubſequentes à pleriſque Hypſicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui ſolent: in quorum quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrum, tam ſecundum ſuperficies, quam ſoliditates: In poſteriori vero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam: vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum Euclidis. Verùm quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inſcriptiones vnius in alio: quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartuſdecimus, quinque vero problematibus decimuſquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non ſolum inſequentes duos libros quampluribus theorematibus problematibuſque locupletauit: verum etiam integrum librum, qui ordine decimuſſextus eſt, adiunxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14 diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri, facile intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.

QVONIAM vero in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem ordine, & inter ſe, & à Franciſco Fluſſate, ideoque & à nobis diſcrepant: annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior vero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur: Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemque in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.

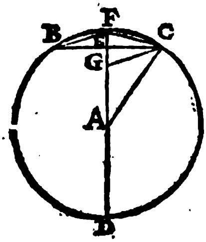
THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eiuſdem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidiã eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur

a 3.*tertii.* rectæ AC, CG, CF, BF. *a* Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales,



b 4.*primi.* nempe recti; *b* erunt baſes CF, BF, æquales;

c 28.*tertii.* *c* ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiuſdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſuntq; anguli contenti recti;

d 4.*primi.* *d* erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit

e 33.*ſex.* arcus CF. *e* Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli

f 20.*tertii.* CAF: *f* Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF,

g 32.*primi.* duplus erit anguli CAF: *g* Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, vt oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium eiuſdem anguli CGF, ideoque æquales erunt

h 6.*primi.* anguli GAC, GCA; *h* ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FC, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atque idcirco è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam

in pen-

in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hæc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

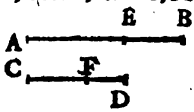
COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem eſſe vtrique lineæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul: Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propoſ 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

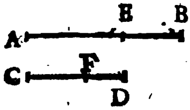
SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones. iv. ij.

SECENTVR binæ rectæ AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim ſit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB, & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD; *a* erit rectangulum ſub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum ſub CD, FD, æquale quadrato rectæ CF. Quam ob rem erit vt rectangulum ſub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF (eſt enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quę demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB, & quadratum rectæ AE, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, & quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ CF. *b* Sed quod quater continetur ſub AB, EB, vna cum quadrato rectæ AE, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex AB, EB; Et quod quater continetur ſub CD, FD, vna cum quadrato rectæ CF, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadra-



a 17. ſexti.

b 8. ſec.



tum rectæ AE, ita quadratum lineæ compoſitæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF, *a* Ac proinde, vt recta compoſita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD, ad rectam CF: Et componendo vt compoſita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc eſt, dupla ipſius AB, ad rectam AF, ita recta compoſita ex CD, FD, & recta CF, id eſt, dupla ipſius CD, ad rectam CF; Et permutando, vt dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita AE, ad CF; *b* Vt autem dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita eſt AB, ad CD. Erit ergo vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, Ac propterea, cum ſit vt tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; *c* erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum vtraque proportio eadem ſit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit vt AE, ad EB, ſic CF, ad FD, & ſic deinique iuxta omnes modos arguendi ex proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 2. ſec.
b 15. quinti.
c 19. quinti.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.

QVONIAM enim d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione ſectam;* e *& recta ſubtendens pentagoni angulum ſecta extrema ac media ratione facit maius ſegmentum, latus ipſum pentagoni:* f *fit vt eadem ſit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris ſegmenti ad minus, quæ maioris ſegmenti rectæ angulum pentagoni ſubtendentis ad minus. Cum ergo ſit, vt maius ſegmentum ad minus, ita tota ad maius ſegmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod eſt propoſitum.*

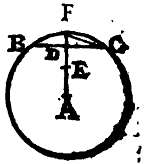
d 9. tertiidec.
e 8. tertiidec.
f 2. quartidecimi.

EX hac quoque propoſitione & præcedenti inferemus hoc aliud theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri

lateri ductæ, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

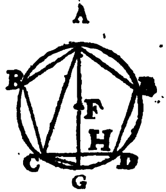
EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius ſegmentum AE, eſſe æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ductæ: minus verò ſegmentum ED, æquale eſſe dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli. Extenſa namque recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. huius lib. arcus BC. nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam ſecetur in F, a Ac proinde recta compoſita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum AF, latus hexagoni minus vero ſegmentum FC, latus decagoni. a 9. tertii dec. *Quare vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit vt tota AD, diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex AF, FC, ſimiliter diuiſam, ita AE, maius ſegmentum ad AF, maius ſegmentum: & ED, minus ſegmentum ad FC, minus ſegmentum: b Eſt autem tota AD, dimidium totius compoſitæ ex AF, FC.* b quarti decimi *Igitur & AE, ipſius AF, ſemidiametri & ED, ipſius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propoſitionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis ſit dimidio ſemidiametri: perſpicuum eſt, maius ſegmentum AE, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod eſt propoſitum.*

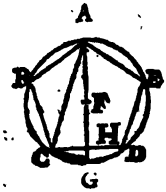


THEOR. 3. PROPOS. 3. ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AG, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per Coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta ſubtenſa CG,





latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectæ FG: erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: *a* Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AG, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdem rectæ FG: *b* Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur quadrati. Quod erat demonſtrandum.

a 47. *primi.*

b 10. *tertii dec.*

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiuſmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrum inſcribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam ſphæra deſcripti: eritque ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. *c* Perſpicuum eſt autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla eſſe quadrati ſemidiametri FG. &c.

c 3. *quartidecimi.*

THEOR. 4. PROPOS. 4.

6. iij.

SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum ipſi AB, *d* eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum BA: Ponatur



d 9. *tertiidec.*

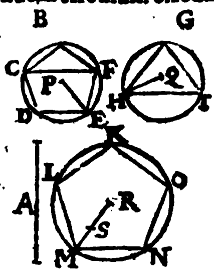
tur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter. a Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, maius ſegmentum ad AD, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt AB; erit & AC, eiuſdem circuli latus decagoni. a 1. quartidecimi.

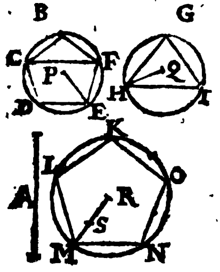
ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori ſegmento AC; b eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione, Cum igitur AB, maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib 13. AD. minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi AD, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum. b 5. tertii dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circumſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, c ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoq; quodlibet ipſorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI, Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secetur que RM, extrema ac media ratione in S; d eritque maius ſegmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni Subtendat quoque recta CF, angulum B. pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdem propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris c 13. tertii dec. d 4. quartidecimi.





a 1.*quartidecimi.* b 22.*ſexti.* cubi CF, ſecti extrema ac media ratione, *a* erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo per ea; quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ.22. lib.5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ.15. lib.13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM. ex coroll.1. propoſ.16. lib.13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: *c* Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, *d* (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; *e* ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH; & idcirco ſemidiameter BE ſemidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 10.*tertiidec.*

d 3.*quartidecimi.*

e 12.*tertiidec.*

THEOR. 6. PROPOS. 6.

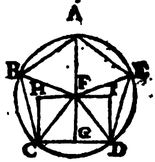
iij.
vj.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum la[...] pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendicu[...]

ri co[...]

ri comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.

Ex centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum ſub FG, & CD, trigeſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1, cum bina latera vnius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipſi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum ſub HC, hoc eſt, ſub FG, & CD. a Quoniam vero rectangulum CI, duplum eſt trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies ſumptum, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint vni pentagono; Atque adeo ſextuplum rectanguli CI, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum CI, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorum pentagonum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum. a 41. primi



Aliter. Facta eadem figuræ conſtructione, b cum rectangulum CI, duplum ſit trianguli FCD, hoc eſt, æquale triangulo FCD, bis ſumpto; Erit rectangulum CI, trigeſies ſumptum æquale triangulo FCD bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei Doeecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis conſtituunt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD, ſumptum ſexagies æquale erit ſuperficiei Dodecaedri. b 41. primi

THEOR. 7. PROPOS. 7. iij. vij.

Si ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum ſub DE, & BC, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes



trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipſi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum ſub FB, hoc eſt, ſub DE, & BC. a Quoniam vero rectangulum BG, duplum eſt trianguli BDC. atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis. hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triangulo Icoſaedri; Atque adeo idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 41. primi.

b 41. primi.

ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, b cum rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo DBC, ſumpto ſexageſies. Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigeſies ſumptum æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri,

COROLLARIVM.

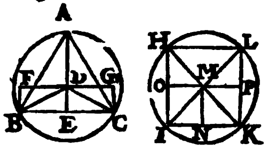
ITAQVE ſuperficies, (repetita figura proxime antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. c Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto, d Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoq; ſumpto: Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecaedri quam hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri. e Quare erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt rectangulum illud, trigeſima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

c 6. quartidecimi.
d 7. quartidecimi.
e 15. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

NON diſſimili argumento indagabimus ſuperficies reliquorum trium corporum regularium, Tetracaedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam ſi ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri; in octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficies Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri A B C, circumſcriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum B G, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Tetraedri.



a Quoniam enim rectangulum B G, duplum eſt trianguli D B C, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis; erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totam ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipſi A B C, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale. a 41. primi.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. b Cum enim rectangulum B G, duplum ſit trianguli D B C, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor huiuſmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri. b 41. primi.

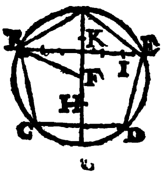
SIT tertio quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, deſcribatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur O P, ipſi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum ſub O I, hoc eſt, ſub M N, & I K, ſumptum duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. c Quoniam enim rectangulum I P, duplum eſt trianguli M I K, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula conſtituant ſex quadrata, id eſt, totam ſuperficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum. c 41. primi.

ALITER Cum duo rectangula I P, conficiant quadratum H I K L; (ſunt enim I P, P H, æqualia, cum recta O I, ſit dimidium lateris H I, nempe æqualis ipſi M N) conſtituent duodecim talia rectangula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiem cubi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

IV. viij. RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres ſint A H: Angulum vero A, ſubtendens recta BE ſecetur in ſex partes æquales, quarum quinque ſint B I, & vna I E, ita vt B I, ſint quintupla ipſius I E. Dico rectangulum comprehenſum ſub A H, B I, æquale eſſe pentagono A B C D E. Ducta enim recta BF; quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cum ſit ſemidiameter; erit A H, ipſius A F, ſeſquialtera. Quia vero recta F A, diuidens arcum B A E, bifariam, diuidit quoque rectam B E, bifariam, per coroll. 1. propoſ. 10 lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, quam K E, tres ſextas rectæ B E; atque adeo cum BI, contineat quinque, continebit KI, duas: Ac proinde & KB, ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad A F, ita K B, ad



a 16. ſexti. K I; *a* atque idcirco rectangulum ſub extremis A H, K I, æquale
b 41. primi. erit rectangulo ſub mediis A F, K B. *b* Eſt autem rectangulum ſub A F, K B, duplum trianguli A B F, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin A F, & eandem altitudinem B K, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta, Igitur & rectangulum
c 1. ſex. ſub AH, KI, duplum erit eiuſdem trianguli ABF: *c* Eſt autem & rectangulum ſub AH, KI duplum rectanguli ſub A H, I E; propterea quod & baſis K I, dupla eſt baſis I E, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius B E, & IE, vnam) eademque ſemper altitudo A H. Igitur æqualia ſunt triangulum A B F, & rectangulum ſub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rec-
d 1. ſex. ctis è centro F, vt propoſ 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero ſub A H, B I, quintuplum eſt rectanguli ſub A H, I E; quod & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eademque ſemper altitudo A H.

Igitur

Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

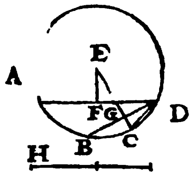
COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. libr. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, (*a* comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, biſariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG. biſariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti. *a 5. quartidecimi.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. IV. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eãdem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

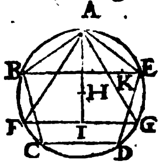
IN circulo ABCD, *b* circumſcribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagon. BD, & trianguli AD: & ex centro E; ducatur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe, vt H, lat⁹ cubi, ad AD, latus Icoſaedri: ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiẽ Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt BD, latus Dodecaedri. ex coroll. 2. propoſ 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione maius ſegmentum eſt EF, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. *c* Erit vt H, tota ad BD, maius ſui ſegmentum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum; *d* Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF; æquale erit rectangulo ſub mediis BD, EG. *e* Quia vero eſt, vt H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub AD, EF, cum baſes ſint H, AD, altitudo vero ſemper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectangulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub AD, EF. Quare cum ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectangulũ ſub BD, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoq;, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiẽ Icoſaedri. Superficies itaque

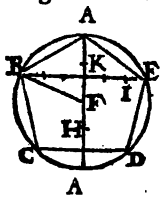


b 5. quartidecimi.
c 2. quartidecimi.
d 16. ſexti.
e 1. ſexti.

itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. quartidecimi. ALITER. a Circumſcribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icoſaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2 propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint B k. Dico rurſus eſſe, vt B E, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, Quoniam enim rectangulum ſub A I, B k, æquale eſt pentagono A B C D E, ex coroll. propoſ 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale eſt triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: b Eſt autem vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B k, ad I F. cum baſes ſint B k, I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque vt pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B k, ad I F; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta Bk, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æque multiplicentur per numerum 20. c erit quoque vt pentagonum A B C D E, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta Bk, duodecies ſumpta ad rectam I I, vigeſies ſumptam: Atqui recta B k, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B k, contineat quinque ſextas partes ipſius B E, continebit eadem B k, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E.) Recta vero I F, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri F G, decies ſumpto; (eo quod F G, eſt ipſius I F, dupla.) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi B E, decies ſumptum ad latus Icoſaedri F G decies ſumptum; Ac propterea, d cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.





b 1. ſex.

c ſchol. 22. quinti.

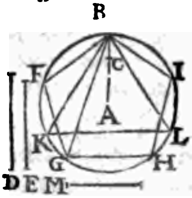
d 15. quinti.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. IV. IX.

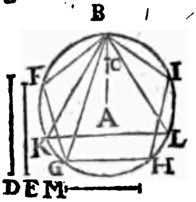
Secetur recta A B, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum A C. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icoſaedri in ſphæra eadem cum cubo deſcripti. Ex A, centro, ad interuallum A B, circulus deſcribatur, in quo conſtituatur & pẽtagonum æquilaterum B F G H I, & triangulum æquilaterum B K L. Si igitur B F, ponatur latus Dodecaedri alicuius ſphæræ, erit ducta recta B G, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Quoniam vero A C, maius ſegmentum ſemidiametri A B, ſectæ extrema ac media ratione, *a* eſt latus Decagoni in circulo B F G H I, in quo nimirum A B, latus eſt Hexagoni; *b* poterit B F, latus pentagoni & totam A B, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum A C, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſſit iam & recta M, totam A B, & minus ſegmentum B C, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitũ Icoſaedri, vt eſt B F, potens totam A B, & maius ſegmentum A C, ad M, potentem totam A B, & minus ſegmentum B C. *c* Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri B K, triplum eſt quadrati ſemidiametri A B: *d* Item quadrata rectarum A B, B C, tripla ſunt quadrati rectæ A C; Erit vt quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ A B, ita quadrata rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratum rectæ M ipſis æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C: Eſt autem vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit B F, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. eo quod B G, eſt latus cubi, & B F, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ; *e* Erit vt tota A B, ad maius ſegmentum A C, ita tota B G, ad maius ſegmentum B F; *f* Ac proinde vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad quadratũ rectæ B F,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F, ita



a 4. quartidecimi.
b 10. tertiidecimi.
c 12. tertiidecimi.
d 4. tertiidecimi.
e 2. quartidecimi.
f 22. ſexti.

BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; a Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. Cum igitur propoſita latera D, E, cubi & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta BF potens totam AB, & maius ſegmentum AG, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC, ita ſe habere propoſitum cubi latus D, ad Icoſaedri propoſitum latus E. Si recta itaque linea ſecetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat oſtendendum.

a 22. ſexti.



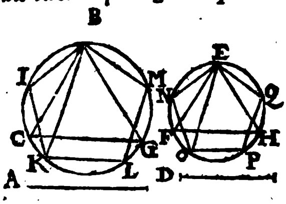
SCHOLIVM.

QVOD vero propoſita latera cubi & Icoſaedri D, & E, eiuſdem ſphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, demonſtrabimus hoc propoſito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icoſaedrorum BCG, EFH, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectæ BK, CK, EO, FO. b Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoque ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rurſus quia arcus BIK, ENO, ſimiles ſunt, (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circumferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex de-

b 5. quartidecimi.



ſinitio-

ſinitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quam anguli BKC, EOF, inter ſe, cum tam illi, quam hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulũ BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum. a Quare erit vt BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita EO, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum. a 4. ſext.

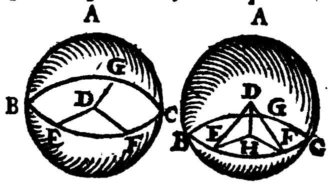
PERSPICVVM eſt igitur id id, quod in demonſtratione aſſumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunq; alia ſphæra.

LEMMA I.

SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

SECETVR ſphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem ſectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, eſſe circulum. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione BEFCG; ducanturque ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ, quotcunque DE, DF, DG.

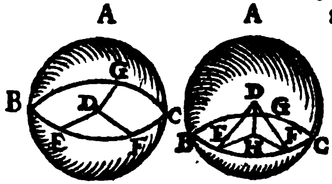


Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cum ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiuſque centrum D, idem cum centro ſphæræ.

TRANSEAT ſecundo planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autem ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vſque communis ſectionis; & connectan-

nectantur rectæ DE, DF. *Quoniam igitur anguli* DHE, DHF, *ex defin.* 3. *lib.* 11. *recti ſunt*; a *erit tam quadratum rectæ* DE, *quadratis rectarum* DH, HE, *quam quadratum rectæ* DF, *quadratis rectarum* DH, HF, *æquale*: *Sunt autem quadrata rectarum* DE, DF, *æqualium ex centro ſphæræ ad totam ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* DH, HE, *quadratis rectarum* DH, HF, *æqualia erunt*; *& proinde, dempto communi quadrato rectæ* DH, *reliquum quadratum rectæ* HE, *reliquo quadrato rectæ* HF, *æquale erit. Quare & rectæ* HE, HF, *æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex* H, *ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus* HE, HF. *Figura igitur plana* BEFCG, *vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit*; *eiuſque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis* DH, *cadit. Quod eſt propoſitum.*

a 47. primi.



COROLLARIVM.

ITAQVE ſi planum ſecans tranſierit per centrum ſphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra. Si vero planum ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam ſphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum ſecans ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe æquales, vt perſpicuum eſt.

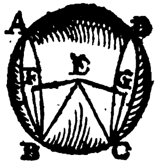
LEMMA II.

CIRCVLI in ſphæra æquales, æqualiter diſtant à centro ſphæræ: & circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt.

IN ſphæra ABCD, *cuius centrum* E, *ſunt circuli æquales* AB, DC. *Dico ipſos æqualiter à centro* E, *diſtare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* EF, EG, *quæ per corollar. præcedentis lemmatis in ipſorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* FB, GC, *ad circumferentias circulorum vtrimque, connectanturque rectæ* EB, EC. *Quoniam igitur anguli* EFB, EGC, *recti ſunt, ex definit.* 3 *lib.* 11. b *Erit tam quadratum*

b 47 primi.

tum rectæ E B, quadratis rectarum E F, F B, quam quadratum rectæ E C, quadratis rectarum E G, G C, æquale: Sunt autem quadrata rectarum E B, E C, æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum E F, F B, quadratis rectarum E G, G C, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium F B, G C, cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ E F, reliquo quadrato rectæ E G, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares E F, E G. Quam ob rem circuli A B, D C, æqualiter diſtant à centro E.

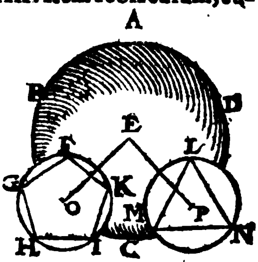


SED iam æqualiter diſtent circuli A B, D C, à centro ſphæræ E. Dico ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, oſtendemus eodem modo, quadrata rectarum E F, F B, æqualia eſſe quadratis rectarum E G, G C; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, E G, cum circuli æqualiter ponantur diſtare à centro, reliquum quadratum rectæ F B, reliquo quadrato rectæ G C, æquale erit: atque adeo æquales erunt rectæ F B, G C, ſemidiametri ſcilicet circulorum A B, D C. Circuli igitur A B, D C, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

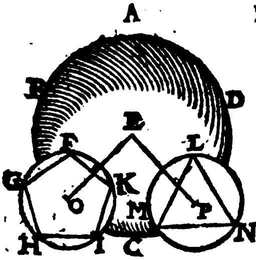
THEOR. II. PROPOS. II.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cui latus ad latus Icoſaedri: in vna eademque ſphæra. 4. 1.

IN ſphæra A B C D, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum EGHIK: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra A B C D, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangũt: ſi per pentagonũ, & triangulum plana ducãtur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in ſphæra EGHIK,



nn LMN,



a 5. quartidecimi.

LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. *a* Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum *c* æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN: Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphæræ diſtabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales ſunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri: & ad omnia triangula Icoſaedri deductæ æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ: reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum: Ac proinde cum & baſes ipſarum æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12 Eodemq; modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrũ in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. *b*

b 6. duodecimi.

Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuſque eadem ſit altitudo: Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt (ſicut modo diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20 baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: *c* Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ: atque adeo ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

d 9. quartidecimi.

e 10. quartadecimi.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, *d* ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra. *e* Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemque ſphæræ, vt eſt linea potens totam diuiſam

quæ

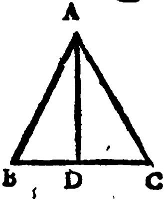
nam cunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: *a* Itē a 11. *quartidecimi.* eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra: Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones. nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri: & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectā extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdē ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

9. xj.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis A D. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, *b* anguli B, & C, æquales ſunt: & anguli ad D, b 5. *primi.* recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC: habent autem & latus AD, commune, vel A B, A C, æqualia. *c* Igitur & reliqua latera B D, C D, æqualia ſunt: ac propterea latus c 26. *primi.* B C, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. *d* Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarum A D, B D; erunt quoque quadrata rectarū d 47. *primi.* A D, BD, quadrupla quadrati rectæ BD: Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ A B, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



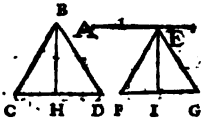
COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD. & C D, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera A B. AD, trianguli A B D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli A C D; & baſis B D, baſi C D, æqualis; *e* Erunt & anguli B A D, C A D, æquales, id eſt, angulus B A C, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari A D. e 8. *primi.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

xiij. **SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.**

SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim BCD, vnum triangulum Tetraedri, & EFG, Octaedri illius ſphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, EI. a Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri BC, b & duplum quadrati lateris Octaedri EF; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. c ideoque commenſurabilia erunt: Quare lineæ ipſæ, A, BC, EF, commenſurabiles exiſtent ſaltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



a 13. tertii decimi.
b 14. tertii decimi.
c 6. decimi.

RVRSVS, d quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BH, quam quadrati rectæ EF, quadrati rectæ EI, ſeſquitertium eſt: habebunt tam quadrata rectarum BC, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. e ideoque tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam CH, ipſi BC, quam FI, ipſi EF; dimidia videlicet toti, commenſurabilis. f Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commenſurabiles inter ſe erunt: Ac proinde cum CH, & FI, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales. g Quoniam vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt conſtat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. h cum oſtenſum ſit talium partiũ 1. eſſe tam quadratũ CH, quam quadratũ FI, qualium 3. eſt tam quadratum BH, quam quadratum EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles: i Ac proinde tam rectangulum ſub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, vt ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum CD, FG, duplæ ſint baſium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri

d 12. quarti decimi.
e 6. decimi.
f 12. decimi.
g 9. decimi.
h 12. quarti decimi.
i 22. decimi.

trian

triangulo B C D, ſit commenſurabilis: (eſt enim triangulum B C D, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo E F G, commenſurabilis. (Eſt enim triangulum E F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia G H, F I, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas C H, B H, quam F I, E I, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles: Ac propterea rectangula ſub C H, B H, & ſub F I, E I, hoc eſt, triangula B C D, E F G, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

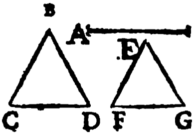
O. XIV.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulum B C D; Octaedri vero baſis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialterã ſuperficiei Tetraedri. a Quoniam enim quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri C D; duplum vero quadrati lateris Octaedri F G; b ſit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. ſit quadratum lateris C D, & talium 3. quadratum lateris F G. Quare quadratum rectæ C D, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ F G: Vt autem quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ F G, ita eſt triangulum B C D, ad triangulum E F G. (c quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habẽt laterum C D, F G, duplicatam, cum ſint ſimilia.) Igitur & triangulum B C D, ſeſquitertium eſt trianguli E F G.

a 13. tertii decimi.

b 14. tertii decimi.



c 20. & 19. ſex.

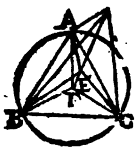
RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulum B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G: Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum B C D, talium 3. eſſe triangulum E F G: Efficitur, vt triangulum E F G, octies ſumptum, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24; At triangulum B C D, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16.

Quamobrem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atq; Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

o. XV. **Recta linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphęra deſcripti per centrum ſphęrę ducta, cadit in centrum baſis oppoſitę, eſtque perpendicularis ad dictam baſin.**

Sit Tetraedrum A B C D, contentum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus A B C, D A B, D B C, D C A, in ſphæra, cuius centrum E: ducaturque ex angulo D, per E, centrum ſphæræ recta D E F, incidens in baſin A B C, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis A B C, & D F, perpendicularem eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis E A, E B, E C: F A, F B F C: quoniam rectæ E A, E B, E C, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt: erunt duo latera E A, E D, trianguli E A D, æqualia duobus lateribus E C, E D, trianguli C E D: Sunt autem & baſes A D, C D, æquales, cum ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium.



a 8. primi. *a* Igitur anguli A E D, C E D, æquales erunt: Ac proinde & reliqui A E F, C E F, æquales erunt, *b* eo quod tam A E D,

b 13. primi. A E F, quam C E D, C E F, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli B E F, C E F, ſi conſiderentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera E A, E F, trianguli E A F, æqualia ſunt lateribus E C, E F, trianguli E C F, & anguli ipſis contenti

c 4. primi. oſtenſi æquales: *c* Erunt baſes F A, F C, æquales. Sic quoque æquales erunt F B F C, ſi conſiderentur triangula E B F, E C F. Quare cum tres rectæ F A, F B, F C, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales: *d* erit F, centrum baſis A B C, ſeu circuli eam

d 9. tertij. circumſcribentis.

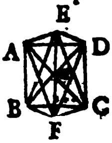
Qvia vero ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli A B C, demiſſa in centrum circuli cadit: efficitur, vt recta D E, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens perpendicularis ſit ad planum circuli, ſeu baſis Tetraedri A B C. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra, quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis vero vtriuſque eſt quadratum ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ. a. xvj.

SIT Octaedrum A B C D E F, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus E A D, E A B, E B C, E C D, F B C, F B A, F A D, F D C, & in ſphæra deſcriptum, cuius centrũ G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualiũ altitudinum quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quæ æquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphæræ, ductæ videlicet è centro ad ſuperficiem ſphæræ: *a* quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri A G, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ A B, & talium partium 1. quadratum rectæ A G; Ac proinde quadratum rectæ A B, duplum erit quadrati rectæ A G. Cum ergo quadratum rectæ A G, æquale ſit quadrato rectæ B G: erit quadratum rectæ A B, æquale duobus quadratis rectarũ A G, B G: *b* Ac propterea angulus A G B, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli A G D, B G C, C G D, recti. *c* Quam obrem A G, C G, & B G, D G, in rectum erunt coniunctæ: *d* atque adeo rectæ A C, B D, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent plano: *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipſis. Quare quadrilaterum A C D, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarum baſis communis A B C D, vertices vero E, & F: quæ pyramides æquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet conſtet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia ſunt & ſimilia, & baſi communi A B C D. Dico iam earum altitudines eſſe æquales, & baſin A B C D, eſſe quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Quoniam enim oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri A B, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum A G, B G: erit quoque quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum A G, E G: *f* Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, *g* ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe



a 14. tertii decimi.

b 48. primi.

c 14. primi.

d 2. undecimi.

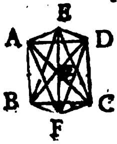
e 7. undecimi.

f 48. primi.

g 4. undecimi.

ad baſin pyramidis. Quare F G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus F G, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo F G, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuũ eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia

a 14. tertii decimi. b 48. primi.



A C, eſt diameter ſphæræ: a erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D: Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD, DC. b Quare angulus ADC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt: quod cum ſit deſcriptum ex latere Octaedri AB: c conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

c 12. tertij decimi.

SCHOLIVM.

MVLTO brevius hanc propoſitionem demonſtravimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur à Campano, non habita ratione conſtructionis Octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco inſcribere.

o. xvij.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ.

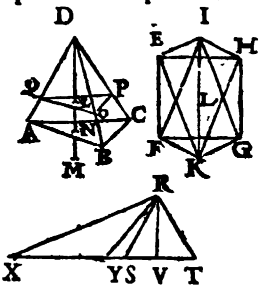
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrũ in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratũ diametri ſphæræ.

SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrum E F G H I K, in vna eademq; ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphæræ D M, incidens in baſin A B C, ad punctum N. d Erit igitur N, centrum baſis ABC, & D N, perpendicularis

d 15. quarti decimi.

aris ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ, & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri. per coroll. 2. propoſ. 13 lib. 13. Erit DL. ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC: *a* Eruntque rectæ QO, OP, PQ. Parallelæ rectis AB, BC, CA: Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, *b* cum anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſinguiis: At ABC, eſt æquiangulum ex coroll. propoſ 5. lib. 5. Igitur & QOP, æquiangulum erit: Ac propterea & æquilaterum, ex coroll propoſ. 6. lib. 1. ideoque ſimile ipſi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris ſimilia, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, ſimiles ſunt ex defin. 9. lib. 11. *c* Rurſus quia plana parallela ABC, QOP, ſecant rectas DN, DC, proportionaliter: erit vt DN, ad DL ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum oſtenſum ſit DN, eſſe talium partium 4. qualium 3. eſt DL.) Igitur & DC, ad DP. erit vt 4. ad 3. Ac proinde, *d* cum pyramides ſimiles habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis 4. ad 3. vt conſtat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri ſunt minimi in proportione 4 ad 3. vt conſtat ex propoſ. 2. lib. 8. Rurſus *e* quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam: erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iiſdem numeris conſtat.



a 16. *undecimi.*

b 10. *undecimi.*

c 17. *undecimi.*

d 8. *duodecimi.*

e 20. *ſexti.*

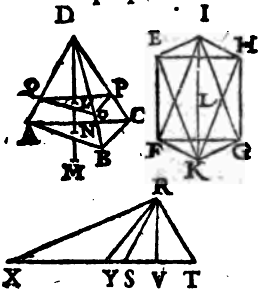
Sit iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP: demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. *f* Eritque latus RT, hoc eſt, DP, illi æquale, potentia ſeſquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum re[illegible] DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, eſt potens vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. *quartidecimi.*

Rursus extenſa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propoſ. 6. lib 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquiter-

tia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt ſeſquitertia) ac propterea qualium TY, eſt 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum ſub recta RV, (quæ poteſt viginti ſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris DC) & ſub recta TY, (quæ continet octo nonas partes eiuſdem lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

a 1. ſext. CVM enim ductis rectis RX, RY. a triangulum RTX, duplum ſit trianguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY:
b 41. primi. b Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV,
c 7. quinti. TY. c Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum, RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idem triangulum RST:



d 1. ſext. d Eſt autem triangulum RTX, ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale, erit vt 64 ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD: At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK (Nam cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planum QOP, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque ſphæræ ſemidiameter DL
e 16. quartidecimi. altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: e Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratũ EFGH, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrum EFGHIK) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum

dratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitum ad Octaedrum; &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP: continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, a cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV: erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, ſeu DP: (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimasſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. ut rectangulum ſub RV. quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimasſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, ut volebat Campanus.

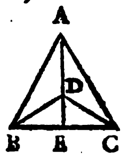
a 12. quartidecimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

o. xvij.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico AE, triplam eſſe rectæ DE, quæ ſcilicet perpendicularis eſt è centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia ſint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (è centro enim ducuntur) ſit autem & baſis AB, baſi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum ſub AE, EB, triangulo ABC, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli BDC, dupla ſit baſis BE, vtriuſq; rectanguli; Erit quoque rectangulum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: b Eſt autem vt rectangulum ſub AE, EB, ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdem altitudinis EB, ita baſis AE, ad baſin DE: Igitur & AE, tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendũ.



b 1. ſexti.

COROL-

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE. Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

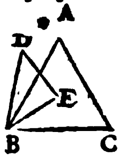
EX quibus rurſus fit, rectam AD, rectæ DE. duplam eſſe.

o. xvij.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur: erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque ſemidiameter ſphæræ DB. Dico ſemidiametrum DB potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum ABC, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; *a* quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. *b* Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare *c* cum quadratum rectæ DB, æquale ſit quadratis rectarum BE, DE; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur Octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 14. *tertiidec.*

b 12. *tertiidec.*

c 47. *primi.*

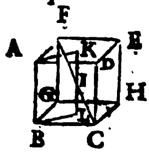
o. xviij.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum

centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem eſſe dimidio lateris cubi. *a* Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi, id eſt, toti ſuperficiei cubi. a *tertiidec.*



PRODVCTA autem KI, ad baſin oppoſitam BCHG, vſque in punctum L; cum KL, recta ſit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per ſcholium propoſ.14 lib.11. Rurſus, *b* quia AB, KL, parallelæ ſunt, quod b, 6. *undecimi.* rectæ ſint ad planum AE, ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis AE, BH, communes ſectiones, lineas rectas AK BL, *c* quæ parallelæ quoque erunt inter ſe; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam vero perpendicularis KL, è centro ſphæræ I, cadit in baſes AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas baſes ambientium in ſphæra, per coroll. lemmatis 1. propoſ.10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam ſecabitur à dicta diametro CF, vt in coroll.1. propoſ.15. lib. 3. oſtendimus; Ac propterea cum KL, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat. c 16. *undecimi.*

COROLLARIVM I.

EX dictis colligitur, ſolidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſſe cubo. *d* Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ: *e* Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe ſolido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeant & baſes, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo ſolida compleant totum cubum, manifeſtum eſt, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum. d 15. *tertiidec.* e 31. *undecimi.*

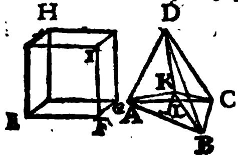
ALITER proponi poteſt hoc corollarium, vt dicamus, ſolidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuum eſt.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem ſolidum, quod fit ex perpendiculari ex

centro

centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſin ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, ſolidum autem EFGH, contentum ſub EI, tertia pars ſuperficiei corporis ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad baſin ABC. Dico ſolidum EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines.



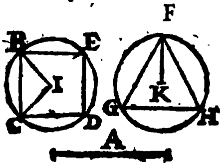
Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſi æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſitionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ducta, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contentum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplum eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 6. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum: Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.

o.
THEOR. 21. PROPOS. 21.

xj. IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc eſt, circulos BCDE, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex

a 15. tertii-dec.



centris IB, KF. *a* Quia igitur quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum re-

b 47. primi.

ctarum

ſtarum æqualium BI, IC, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rurſus a quia quadratum diametri A, duplum eſt quadrati lateris octaedri FG: b & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ: qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ BI: æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK: Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c Quod erat oſtendendum.

a 14. tertii-dec.

b 12. tertii-dec.

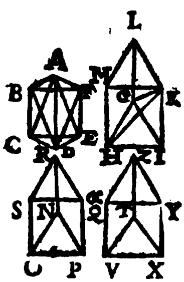
COROLLARIVM.

HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circumſcribentium, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. c qui cum ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt à centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13 quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod eſt propoſitum.

c 21. quartidecimi.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

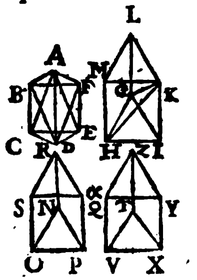
SI octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.



IN eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHI. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum vertex communis eſt ipſa diameter AD, & vertex cōmunis A, nempe in BCDA, cuius baſis BCD: in BDFA: cuius baſis BDF: in CDEA, cuius baſis CDE: & in DEFA: cuius baſis DEF: quæ quidem omnes baſes ſupra quadratum BCEF, exiſtunt continentes cum ipſo dimidiam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum

dum conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtunt, a inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIkLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. b Quoniam igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum. Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14 lib. 11. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIkLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIk, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4 ex coroll. 2. propoſ. 13 lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandum erat.

a 8. primi.



b 14. quartidecimi.

COROL-

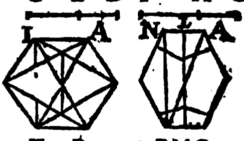
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri. vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. a Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram. a 18. tertiidec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

Si recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

Possit recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG; & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, BK, connectantur recta IB,

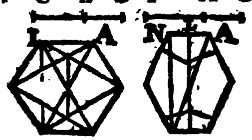


quæ ſubtendet vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia in ſuperficiem ſphæræ, in quo recta RH, latera oppoſita RX, HI, coniungens angulum RSH, ſubtendit (clariuſque patebit ex conſtructione Icoſaedri, quam ad finem lib. 16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16 lib. 13. b erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum ſint inter ſe æquales, (Ducta enim diametro IK; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia ſint lateribus KB, BI; & baſes quoque AB, IK, æquales; c Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; d ideoque quadratum rectæ oppoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE. Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt

b 29. primi.
c 8. primi.
d 47. primi.

quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, ſit maius ſegmentum ipſius CD, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius IB, ſimiliter diuiſæ; (Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt IA, latus Icoſaedri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, *a* maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi IA, lateri Icoſaedri. *b* Cum enim ſit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; *c* erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA ad quadratum rectæ IA: Oſtenſa ſunt autem quadrata rectarum CD, CE, æqualia quadratis rectarum IB, IA; *d* Igitur & quadrato rectæ CE, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 8. *tertijdec.*
b 2. *quartidecimi.*
c 22. *ſexti.*
d 14. *quinti.*



RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, BO, ſecentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipſa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales parallelæ ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. *e* erunt quoque LM, NB. æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, *f* Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale ſit poſitum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius LM, ſimiliter diuiſæ, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus ſegmentum ipſi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus, CE, maius ſegmentum æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit. Quod erat oſtendendum.

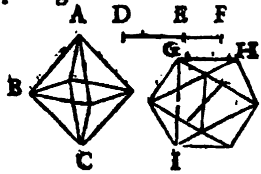
e 33. *primi.*
f 47. *primi.*

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectæ DF, ſectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem ſphæræ inſcriptum Icoſaedrum GHI, cuius latus GH, & ſubtendens angulum pentagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum eſſe quadrati minoris ſegmenti EF. Cum enim GH, ſit latus pentagoni, cuius vnum angulum ſubtendit recta GI; *a* erit GH, maius ſegmentum ipſius GI, diuiſæ extrema ac media ratione; *b* Ac proinde compoſita recta ex GI, GH, ſecabitur ſimiliter in G, puncto extrema ac media ratione. *c* Quia vero quadratum diametri HI, æquale eſt quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus ſit, vt in præcedenti propoſ. oſtenſum eſt; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: *d* Eſt autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla ſunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita eſt quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cum ſit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. *f* Erit quoque vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo; vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque eſt quadrati rectæ EF. Quare ſi latus Octaedri potuerit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod erat oſtendendum.



a 8. tertiidec.
b 5. tertiidec.
c 47. primi.
d 14. tertiidec.
e 2. quartidecimi.
f 22. ſexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

Si recta linea diuiſa extrema ac media ratione cũ minore ſegmento angulum rectum cõſtituat, cui recta ſub-

tendatur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri eius ſphæræ, *in qua* dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

Lineæ recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione conſtituat cum recta AD, quæ æqualis ſit minori ſegmento AC, angulum rectum A, cui recta ſubtendatur BD, ſitq; recta E, potentia ſubdupla ipſius BD. Dico E, latus eſſe octaedri illius ſphæræ,



in qua AD, vel AC, latus eſt Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. maius ſegmentum BC, latus ſit cubi illius ſphæræ, cuius minus ſegmentum AC, vel AD, latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphæræ potentia tripla maioris ſegmenti BC, nempe lateris cubi: *a* Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla eiuſdem quadrati maioris ſegmenti BC. Quadratum igitur diametri ſphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc eſt, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter eſt ſphæræ. *b* Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; Poſſit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia ſubdupla ipſius BD; Erit E, latus Octaedri eiuſdem ſphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuiſa, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 4. tertiidec.

b 14. tertiidec.

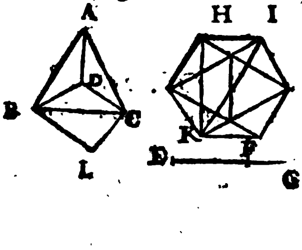
COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt lateris cubi BC, cuius maius ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri, vt conſtat ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 4. lib. 13. cum BC, ſit maius ſegmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuiſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quæuis recta (nimirum BC) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E) potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum AD) eſſe latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

c 18. tertiidec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione ſectæ, latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.



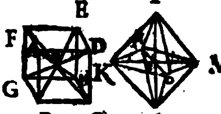
Possit Tetraedri ABCD, latus BC, maius ſegmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuiſæ extrema ac media ratione: Sit quoque HI, latus Icoſaedri HIK, eiuſdem ſphæræ. Dico HI, rectam potentia eſſe

ſe ſeſquialteram minoris ſegmenti FG. Subtendat enim recta
IK, vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti,
onnectaturque recta IK, diameter. *a* Quia igitur HI, eſt maius a 8. *tertiidec.*
egmentum rectæ HK, diuiſæ extrema ac media ratione; *b* Erit
uoque compoſita KHI, diuiſa eodem modo in H, maiusque ſe- b 5. *tertiidec.*
mentum HK, & minus HI. *c* Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangu-
am BCK, ita vt BL, recta ipſi EF, & CL, ipſi FG, ſit æqualis, *d* Erit- c 22. *primi.*
ue angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, d 48. *primi.*
CL, hoc eſt, rectas EF, FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus; vt
ropoſ. 23. huius lib. oſtendimus: *e* Eſtque vt BL, ad LC, ita KH, e 2. *quartidecimi.*
d HI. *f* Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula ſunt. *g* Ac pro-
terea, vt KI, ad IH, ita BC, ad CL: & permutando, vt KI, ad BC, f 6. *ſext.*
ta HI, ad CL. *h* Atqui IK, diameter eſt potentia ſeſquialtera late- g 4. *ſext.*
is Tetraedri BC, Ergo & HI, latus Icoſaedri erit potentia ſeſqui- h 13. *tertiidec.*
lterum ipſius CL, hoc eſt, minoris ſegmenti FH. Si latus itaque
Tetraedri poſſit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod oſten-
lendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

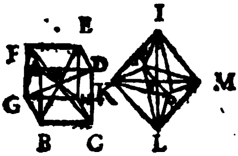
CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra
leſcriptum, eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperfi-
ciem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

SINT in eadem ſphæra cubus ABCDEFGH, & Octae-
rum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam eſſe pro-
ortionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad
uperficiem Octaedri: nec non, quam habet cubi latus ad ſemi-
iametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes
ngulos tam cubi, quam Octaedri, re-
tis lineis, reſoluetur cubus in ſex py-
amides æquales, quod habeant & ba-
es æquales, & altitudines (Cum enim
irculi deſcripti circa pyramidum, ſeu
ubi baſes æquales, ſint æquales, ac pro-



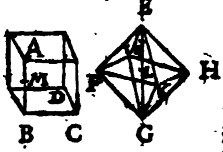
terea æqualiter à centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpen-
liculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum
luctæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. pro-
oſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales,
andem ob cauſam. *i* Quoniam autem idem circulus complecti- i 21 *quartidecimi.*
ur & cubi quadratum, & octaedri triangulum: æqualiter diſta-
unt baſes pyramidum cubi, & octaedri à cẽtro ſphæræ, per lem-
na præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyrami-
um cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad
na m pyram. dem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſin py-

 rami-



ramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſin pyramidis Octaedri; Ideoq; rurſus ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

SINT rurſus in eadem ſphæra cubus ABCD, & octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertià pars AM; Item ex ſemidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octaedrum ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. a ſeſquialterum eſt quadrati BD, lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, rectæ BM, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes IFKH, BD, & altitudines AB, BM. b Ac propterea parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſin BD, & ſub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL, rectæ EN tripla eſt, erit & parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine EL, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſin, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus; Sed & idem parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE, ex coroll. 2. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN. c Item Octaedrum EFGHIK, duplum eſt pyramidis IFKHE. Æquale igitur erit parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL,



a 18. tertiidec.

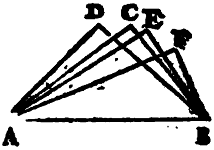
b 34. vndecimi.

c 16. quintidecimi.

d EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine BM, æquale eſt oſtenſum cubo ABCD: Et parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine LN, æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſa ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVOD demonſtratum eſt, a diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſqualteram potentia lateris Tetraedri, ita vt ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia: quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB: a 13. tertii-dec.



Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC: erit recta AC, latus Tetraedri.

RVRSVS b *cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri: Fit, ſi ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium ſit quadrati diametri AC: Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis ſecundum doctrinam ſcholii propoſ. 33. lib. 6. rectam AD, latus eſſe Octaedri.* b 14. tertii-dec.

DEINDE, c *quoniam docuimus, diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi: Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars ſit quadrati diametri AB: Vel ſi quadrato diametri AB, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholii propoſ. 33. lib. 6. lineam rectam BC, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter AB, ipſis & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC: Quemadmodum* b 14. tertii-dec.

dum è contrario, ſi ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC. remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, *quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum: a Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæra, cuius diameter eſt recta prior linea: Conſtat ſi quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmentum: Rectam minorem BE, eſſe Icoſaedri latus.*

a 23. quartidecimi.

POSTREMO, *quoniam ſi recta quapiam potuerit totam aliquam rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum; b Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphæra, cuius diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri AB, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum; Minorem lineam BF, latus eſſe Dodecaedri.*

b 23. quartidecimi.

HACTENVS *ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæra impoſitorum ſcripſerunt. Sequentes autem quinque propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, quiſquis fuit, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemque comparationem ſpectant.*

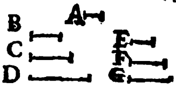
THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium, Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportionales, nec non quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecunda ad ſecundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A: c habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam

c 20. ſexti.

ſam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratũ rectæ E: vt recta C, ad rectam F: a Eſt autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt primum.



quadr.	*B.*	*Recta*	*C.*
quadr.	*A.*	*Recta*	*A.*
quadr.	*E.*	*Recta*	*F.*

a 20. ſexti.

Rvrsvs cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; b habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubũ rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo eſt cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: c Eſt autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 33. undec.

Cubus	*B.*	*Recta*	*D.*
Cubus	*A.*	*Recta*	*A.*
Cubus	*E.*	*Recta*	*G.*

c 33. undec.

SCHOLIVM.

HOC idem demonſtrauimus ad propoſ. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

Qvadratvm lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-

portionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.

In triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, recta perpendicularis A D, quæ biſariam ſecabit latus B C, vt in corollar. propoſ. 12. huius lib. demonſtratum eſt; Ac propterea B D, dimidium eſt lateris A B. *a* Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo ſub A D, B D, æquale ſit triangulũ A B C, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. *b* Sit aũt eidem rectangulo ſub AB, BD, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. *c* Quoniam vero quadratum lateris A B, ad quadratũ rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoq; duplicatã lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 13 ſex.



b 17. ſexti.

c 20. ſexti.

CORROLLARIVM.

Itaqve, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidiũ lateris: æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter A D, D B, æquale eſſe triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

Si cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit quadratrum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.



Sit quadratum cubi cuiuſuis A B C D, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppoſitum F G, deducta diuidens F G, latus biſariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpẽdicularem E H. Poſita enim inter E H, F H, media proportionali I K; *d* cum quadratum lateris Tetraedri E F, duplum ſit quadrati lateris cubi A B; *e* ſit autem & duplum rectanguli ſub latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangu-

d 28. tertiidec.

e 1. ſexti.

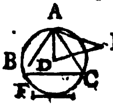
tangulum ſub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; *a* Ac pro- a 17. *ſexti.*
terea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc eſt, tres
rectæ F H. A B, E F, continuè erunt proportionales: Sunt autem
& tres rectæ F H, I K, E H, continuè proportionales, ex conſtru-
ctione. Igitur cum omnium antecedens ſit F H, *b* erit proportio b 28. *quar-*
rectæ E F, ed rectam E H, tertiæ ad tertiam, pro- *tidecimi.*
portionis rectæ A B, ad rectam I K, ſecundæ ad
ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum
A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc eſt,
ad triangulum E F G (eſt enim ex coroll. propoſ.
19. huius lib. quadratũ rectæ I K, æquale triangulo E F G) *c* pro- c 20. *ſexti.*
portionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam
I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, vt
latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca ſi cubus & Tetrae-
drum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demon-
ſtrandum.

F H.	
A B.	I K.
E F.	E H.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis vero, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulum A B C. & altitudo, ſeu axis Tetraedri D E, latusq; cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri A B, eſſe potentia ſeſquialterum axis D E: Axem vero D E, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* deſcripto circulo A B C; ad centrũ D, in quod videlicet cadit axis D E, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur A D, ſemidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc eſt, lateris A B, *e* æquale eſt quadratis rectarum A D, D E, *f* & triplum quadrati ſemidiametri A D; Fit, vt poſito quadrato lateris A B, ſeu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.



d 5. *quarti.*
e 47. *primi.*
f 12. *tertii-dec.*

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, *g* potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratũ lateris F, talium partium 3. quarum 6. poſitum eſt quadratum lateris A B; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratũ axis D E. Igitur quadratum axis D E, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaq; Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

g 18. *tertii-dec.*

COROL.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, poſito quadrato lateris A B, partium 6. quadratum diametri ſphæræ talium partium eſt 9. *a* quod diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis D E: perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, *b* cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13.

a 13. *tertii decimi.*
b 20. *ſexti.*

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoq;, ità eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Quia videlicet *c* tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deductæ, quam ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.

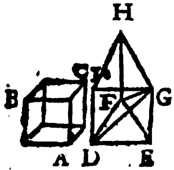
c 12. *quartidecimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.

DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. *d* Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis baſis DEF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem ductam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. huius libr. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinẽ cubi ſeu priſmatis ABC. Erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 9. libr. 11. demonſtrauimus, æqualia erunt priſmata ABC, DEFGHI, cum ipſorum baſes & altitudines reciprocẽtur. Atqui priſma DEFGHI, triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1 propoſ. 7. libr. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiuſdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.

d 30. *quartidecimi.*



COROLLARIVM.

VNDE priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubum ABC, æqualem eſſe priſmati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

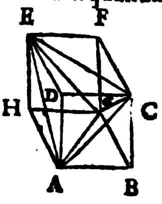
ET SOLIDORVM QVINTVM, VT nonnulli putant. Vt vero alii, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus,

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato A B C D E F G H, oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri E A, E G, E C, ex quarum extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur A G, G C, C A, in reliquis tribus baſibus, quæ extrema priorum trium diametrorum onnectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium quales ſunt, quod potentia duplæ ſint laterum æqualium quadratorum, vt in ſcholio ropoſ.47 lib.1. demonſtrauimus, perſpicuum ſt, quatuor triangula A C E, G A C, G A E, C E, ex dictis diametris compoſita, æquilara eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem, ſeu Tetraedrum conſtitui ex ipſis. uia vero omnes anguli Tetraedri in angulis ıbi collocantur; manifeſtum eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptum, defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. uod faciendum erat.



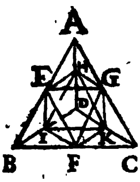
PROBL.

ij.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

In data pyramide octaedrum deſcribere.

Sit in pyramide, ſeu tetraedro ABCD, deſcribendum octaedrum. Diuiſis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, conſtituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, ſupra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia ſunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod ſint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod ſint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: a æquales erunt baſes EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI; & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera ſunt & æqualia inter ſe; ideoq; octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum deſcriptum eſt; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 8. duodecimi.

COROLLARIVM.

Qvoniam vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecantia, vt in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. demonſtrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipſam diuidit in pyramidem HIKD, & priſma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: b Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum bifariam ſecari tribus quadratis æqualibus quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.

b 8. duodecimi.

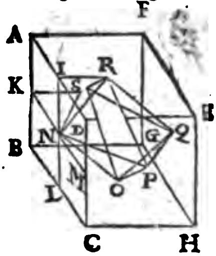
PROBL. 3. PROPOS. 3.

iiij.

In dato cubo octaedrum deſcribere.

Describendvm ſit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera baſis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, puncto, quod quidem centrum eſt quadrati ABCD, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur aliarum baſium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta baſium, cuiuſmodi ſunt NI, RI, NI, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, ſeu quadratorum.

orum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales, propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; a angulus NIR, æqualis eſt recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NkS, angulo recto IAF, in quadrato AE; b Erunt baſes NR, NS. æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe: ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ, Nk, Sk, ductæ ſunt ad k, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S; &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP: Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 10. vndecimi.
b primi.

ALITER. c In cubo dato inſcribatur pyramis: d In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis: Latera vero pyramidis ex demonſtratione propoſ 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri: perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi, atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 1. quintidec.
d 2. quintidec.

COROLLARIVM.

IA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO (ſi ducantur) ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13.

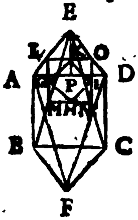
quæ

quæ quidem coniungunt centra baſium cubi oppoſitarũ: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſium cubi oppoſitarum connectentes non ſolum ſeſe mutuo biſariam, vt docuimus coroll. 1. propoſ. 15. libr. 13. ſed etiã ad angulos rectos, vt hic oſtendimus, diuidere.

IV. ## m PROBL. 4. PROPOS. 4

In dato Octaedro cubum inſcribere.

DATVM Octaedrum ſit A B C D E F, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in Octaedro ſex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices ſunt ſex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum conſtituunt; ſit vna earum pyramis A B C D E, cuius baſis A B C D, quadratum, triangula vero æquilatera A B E, E B C, C E D, D E A, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ L M, M N, N O, O L, parallelæ lateribus A B, B C, C D, D A. Erunt igitur & triangula L M E, E M N, N E O, O E L, æquilatera, cum ſimilia ſint triangulis æquilateris A B E, E B C; C E D, D E A, ex coroll. propoſ. 4. libr. 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habent communia. Eſt enim E M, latus commune triangulis L M E, E M N; Et E N, commune triangulis E M N, N E O; & denique E O, commune triangulis N E O, O E L Hinc enim fit, triangulum L M E, triangulo E M N; hoc vero ipſi N E O; & hoc ipſi O E L, æquale eſſe. Conueniunt enim rectæ L M, M N, N O, O L, in punctis L, M, N, O, vt mox oſtendemus. Quocirca & quatuor rectæ L M, M N, N O, O L, inter ſe æquales ſunt. *a* Quia vero ducta recta E K P, tripla eſt rectæ K P. *b* Eſt autem vt E P, ad K P, ita E A, ad L A; Erit quoque E A, tripla rectæ L A. Eademque ratione E B, E C, E D, triplæ erunt rectarum M B, N C, O D. Quocirca rectæ L M, M N, N O, O L, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumq; conſtituent L M N O. Rurſus quia L O, L M, parallelæ ſunt rectis A D, A B, non in eodem cum ipſis exiſtentibus plano; *c* æqualis erit angulus M L O, angulo B A D qui rectus eſt, cum A B C D, quadratum ſit, vt oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. & in propoſ. 16. libr. 14. Ac propterea & angulus M L O, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos L M N, M N O, N O L, rectos eſſe. Quoniam vero tam planum per L O, L M, quam per N M, N O, ductum, *d* parallelum eſt plano A B C D, *e* ipſa, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca L M N O, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, triãguli E L K, æqualia ſint



a 18. *quarti decimi.*
b 2. *ſex.*
c 10. *undec.*
d 15 *undec.*
e 15. *undec.*

tern.

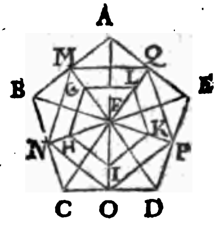
eribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipſis contenti, ęquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariam ſecet angulum A E D, per coroll. propoſ. 12 lib. 13. *a* Erunt & baſes KL, KO, æquales, hoc eſt, recta L O, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione L M, M N, N O, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum ſint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter ſe erunt: Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, *b* æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati L N, anguloſque comprehendunt rectos: (*c* cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus ſint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propoſ. 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus G K I: Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK) quadratum erit G H I K, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubũ deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.
b 4. primi.
c 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

v
vj.

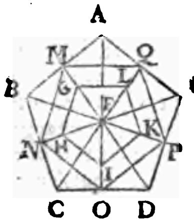
In dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.



Sit ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pentagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis A B C D E F, cuius baſis pentagonum A B C D E, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, ſintque horum triãgulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis G H, H I, I K, K L, L G Ruſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, F P, F Q; quæ ex ſcholio propoſ. 12. libr. 13. bifariam ſecabunt latera A B, B C, C D, D E, E A, in M, N, O, P, Q: ita vt decem rectæ M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, æquales ſint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, *d* æquales quoque erunt rectæ MN,

d 4. primi.

ctæ MN, NO, OP PQ, QM, puncta, M, N, O, P, Q, connectentes: *a* Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FR, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli F B M, æqualia ſint, contineantq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; *b* erunt baſes FM, FN, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum ſemidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circumſcribentium, æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratũ eſt; *c* Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. *d* Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli BNM, MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. *e* Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonũ erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplæ ſunt ipſarum GM, HN, IO, KP, LQ ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. *f* parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; *g* Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoq; & inter ſe æquales erunt. *h* Qu[…] vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta parallela ſu[…] plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, duc[…] conueniuntq; in recta HI, ipſa vnum planum efficient, ex ſcho[…] propoſ. 16 lib. 11. Eodemq; modo oſtendemus plana per IK, K[…] & per KL, LG, nec non per LG, GH, ducta idem planum con[…]tuere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL. pe[…]tagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera hab[…] æqualia & angulos. Quod ſi eadẽ arte in reliquis vndecim py[…]midibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur […]neis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiang[…] quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter ſe erunt. Qu[…]obrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum con[…]tuent, quod quidẽ ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptu[…] cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſa[…]dri, co[…]



a 8. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.
d 13. primi.
e 4. primi.
f 2. ſexti.
g 10. vndecimi.
h 15. vndecimi.

dri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

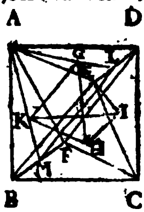
COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icoſaedri ad centra baſiū, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1 propoſ. 10. lib. 14. perpēdiculares ſint ad plana circulorum æqualiū baſes Icoſaedri circumſcribentiū, atq; adeo eorundem diſtantiæ exiſtant à centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lem. 2. eiuſdem propoſ. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atq; ſibi inſcripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

In dato octaedro pyramidem deſcribere. O. V.

PYRAMIS deſcribenda ſit in octaedro A B C D E F. In pyramide octaedri ſuperiori A B C D E, ſumantur G, & H, cētra triangulorū ex aduerſo ſibi reſpondentiū A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, cētra triangulorum ex aduerſo quoq; ſibi correſpondentium C F D, A F B; quæ quidem centra coniungantur ſex rectis G H, G I, G K, H I, HK, I K, vt fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, ſecantes latera oppoſita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per ſcholiū propoſ. 12. lib. 3. coniungaturq; recta LM, *a* quæ ipſi BE, vel FD, æqualis & parallela erit; cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales ſint, & parallelæ, nimirū dimidia laterum DE, BF, oppoſitorū in quadrato E F. Quoniam vero rectæ AL, AM, ſectæ ſunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplæ ſint ipſarum GL, KM, ex coroll. propoſ. 18 lib. 14. *b* Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, ſimilia. *c* Quare erit vt AL, ad LM, ita AG ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK. Eſt aūt AL, ipſius AG, ſeſquialtera; *d* quod GL, ſit tertia pars ipſius AL, ideoq; AG, eiuſdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc eſt, ipſi æqualis DF, ſeſquialtera erit ipſius GK. Hac eadem arte oſtendemus & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentiū ſeſquialtera eſſe latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componētes inter ſe eſſe æquales, hoc eſt, triangula æquilatera æqualia ex ipſis confici, ideoq; Tetraedrum conſtitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor baſium octaedri, deſcriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 33. *primi.*
b 2. *sext.*
4. *sext.*
d 18. *quartidecimi.*

ALITER. *e* In octaedro dato inſcribatur cubus, *f* & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli conſiſtant in centris baſium Octaedri, & in angulis cubi

e 4. *quartidecimi.*
f 1. *quintidecimi.*

colloceturque quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

COROLLARIVM I.

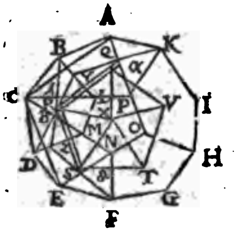
a 9. undecimi. QVIA vero oſtenſum eſt, vtramque G K, D F, parallelam eſſe ipſi L M, *a* ac propterea & G K, ipſi D F, atque adeo ipſi B E, parallelam eſſe; *b* Atque
b 15. undecimi. eadem ratione kH, ipſius F C; E A, parallelum eſſe: Atque idcirco planum GkH, per G k, K H, ductum, parallelum eſſe plano D F C, per D F, F C, necnon & plano BEA, per B E, E A. Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula: Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

COROLLARIVM II.

PRÆTEREA cum octaedrum circumſcribat & cubum & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur: Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt conſtat ex 4. propoſ. huius libr. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. libr. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13 Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſim oppoſitam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

O. vij. In dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q. R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. biſariam diuident latus oppoſitum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, biſariam & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis, quæ & arcus AκP, CDM, circulorum circa pentagona deſcriptorum
c 28. tertij. biſariam diuidant (*c* conſtat enim rectas Aκ, Pκ; Item CD,
d 28. primi. MD. arcus ſubtendere æquales.) *d* Igitur Aα, Cβ, parallelæ ſunt
e 9. undecimi. rectæ BY, *e* atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æqua-

les

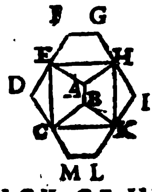
les, nempe dimidia rectarum A P, C M, a quæ æquales ſunt, cum latera K A, K P, lateribus D C, D M, æqualia ſint, anguloſque contineant æquales. b Rectæ ergo ipſas connectentes A C, α β, æquales erunt & parallelæ. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectæ C L, E N, per centra R, S, rectæ ducantur B Z, F Z, connectanturque rectæ C E, γ δ, æquales eſſe ipſas C E, γ δ: c Sunt autem A C, C E, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri A B, B C, quam C D, D E, angulum pentagoni æquianguli continent, vt conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt verſus X, vt figura monſtrare videtur, ſed extroſum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet) Igitur & α β, γ δ, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales ſint (Nam Y Q, Y R, Z R, Y S, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum B L, D M, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, d atque adeo æquales. Item Q α, R β, R γ, S δ, diſtantiæ ſunt rectarum æqualium A P, C M, C L, E N, à centris eorundem circulorum æqualium, e ideoque æquales: Ac proinde & totæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales erunt.) f Erunt quoque anguli α Y β, γ Z δ, æquales: Ac propterea, cum & rectæ Y Q, Y R, Z R, Z S, æquales ſint; g æquales quoque erunt rectæ Q R R S, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula Q X R, R X S, S X T, T X V, V X Q, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri, L, M, N, O, P, conſtituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos ſolidos) quæ quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.
b 33. primi.
c 4. primi.
d 14. tertij.
e 14. tertij.
f 8. primi.
g 4. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

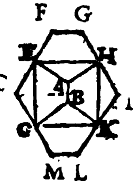
o. viij.

In dato Dodecaedro cubum deſcribere.



Proponantur quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus A E C D B, E F G H A, A H I K B, B K L M C, conuenientia ad latus A B: duo quidem A B C D E, A B K I H, ſecundum latus idem commune A B: alia autem duo A E F G H, B C M L K, ſecundum angulos E A H, C B K. In his vero pentagonis ſubtendantur angulis A, B, D, I, rectæ B H, C K, C E, H K,

quadrilaterum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omni latera AE. AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia ſint, angulo q; contineant æquales, ex hypotheſi; *a* æquales erunt baſes EH, HK, KC CE. *b* Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circumſcribentes arcus æquales; Erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB HK. *c* Quare & EC, HK, inter ſe parallelæ erunt; *d* Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipſas connectunt; parallelæ erunt, *e* in eodemq; cum ipſis plano; ideoq; parallelogrammum erit EHKC; quod oſtendimus eſſe æquilaterū. Quia vero planum ECKH, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1 propoſitionis 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK. deſcriptum; *f* Erunt tam anguli oppoſiti E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; *g* Ac propterea cum oppoſiti E, & K, ſint æquales, necnõ & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K H, recti. Quare E K, quadratum erit; collocans ſuos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis ſimiliter octo angulis octo aliæ rectæ ſubtendantur eodem ordine; conſtitutũ erit ſolidum ſex quadratis contentũ; quæ cum ſint æqualia, *h* eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehenſos ſubtendentia æqualia ſunt, cubũm conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiuſque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 4. primi.
b 28. tertij.
c 9. undecimi.
d 33 primi.
e 7. undecimi.
f 22 tertij.
g 34. primi.
h 4. primi.

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ ſubtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt CB. ipſi AB, eſſe parallelam.

o.
I X.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

In dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit Octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario propoſ. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuo in T, centro ſphæræ bifariam, & angulos rectos

di-

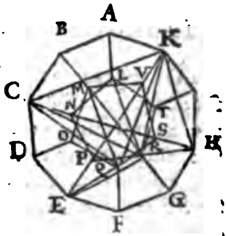
iuident, per coroll.3. propoſ.17. lib. 13.
tque adeo æquales quoque erunt ea-
rum dimidiatæ partes NT, OT, PT,
QT. RT. ST. a Quocirca duodecim
rectæ ſub e identes duodecim angulos
rectos NTP, PTO, OTQ, QTN,
NTR, RTP, PTS, STQ, QTR,
RTO OTS, STN, quales ſunt NP,
PO OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR,
RO, OS, SN, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis a 4.primi.
continentur ; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ,
QRN, OSP, PSN, OSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt,
conſtituentq; octaedrum intra Dodecaedrum deſcriptum, cum
ſex anguli octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex
conſtructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum deſcripſi-
mus. Quod faciendum erat.

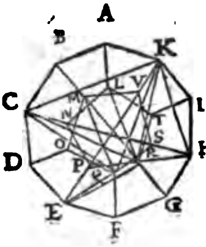


PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato dodecaedro pyramidem deſcribere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABC-
NL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM,
DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo de-
ſcribenda ſit pyramis, ſiue tetraedrum. Sumantur tria pentagona
ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum ſolidum L, componen-
tia, in quibus tres anguli C, R, K, (quo-
rum quidem C, opponitur lateri AL,
communi pentagonis CAL, ALI; At
vero K, lateri LV, communi pentagonis
KLT LTP; Deniq; R. Lateri LN, com-
muni pentagonis RLN, LNB) rectis
connectantur CK, CR, KR; & ex pun-
ctis C, K, R, ad angulum Q ipſi L, oppo-
ſitum rectæ ducantur CQ KQ RQ, vt
ſit pyramis conſtructa CKRQ Ductis
autem tribus diametris Dodecaedri ſeu ſphæræ CH, KE, RM, &
connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; b quoniam dode- b 17.tertij-
caedrum in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli CHK, exten- decimi.
datur, fiet cõmunis eius ſectio cum ſphæra circulus per lemma 1.
propoſ.10 lib.14. c Ac propterea angulus CKH, in ſemicirculo exi- c 31.tertij.
ſtens, rectus erit. Nõ ſecus oſtendemus, rectos eſſe angulos CRH,
RE, KQE, RQM, CQH. d Quocircà cum in omni triangulo d 47.primi.
rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit
quadratis laterum circa rectum angulum ; ſint autem quadrata
diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia : Æqualia e-
runt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH,





& quadratis rectarum K R, K E, & quadratis rectarum K Q, Q E, & *quadratis* rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualiũ KH, RH, RE, QE, QM, & QH, (Hæ enim rectæ cum ſubtendant angulos pentagonum æquales æqualibus rectis comprehenſos, *a* æquales ſunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum C K, CR, R K, K Q, R Q, & C Q: Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoq; tetraedrum componunt CKRQ: quod cũ habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. primi.

b 8. quintidecimi. *c 1. quintidecimi.*

ALITER. *b* In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur: *c* & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideant: perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 11. PPOPOS. 11.

o. xj.

In dato Icoſaedro cubum deſcribere.

d 5. quintidecimi. *e 8. quintidecimi.*

d DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrum: *e* & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi reſideat in angulis Dodecaedri: anguli vero Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri collocentur: tangent anguli cubi eadem centra baſium Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rem in dato Icoſaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

o. xij.

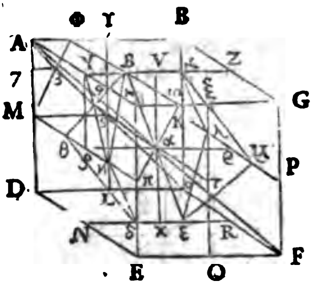
In dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

f 11. quintidecimi. *g 1. quintidecimi.* *h 11. quintidecimi.* *i 1 quintidecimi.*

IN dato Icoſaedro *f* cubus deſcribatur, *g* & in hoc cubo pyramis: factumque erit, quod proponitur. *h* Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri: & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri: Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. *i* In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 15.

In dato cubo Dodecaedrum deſcribere.

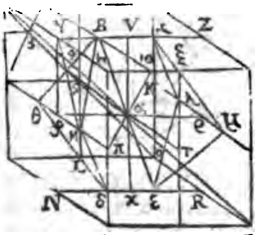


Ducatur in figura recta Hα C.

Sit in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π. ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξ O, M π, KP, NR, nuſquam inter ſe coeuntibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρ Q, quæ ſe mutuo in centro α, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntque lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, M π, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt ſint maiora ſegmenta, Y β, Z γ, M θ, π κ, ductis rectis Y ρ, Y κ, β ρ, β κ. Quoniam ergo Y ρ, YV, dimidia lateris cubi ſunt æquales; & ρ κ, β V, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, ρ π, æqualia quoque: a Sunt autem quadrata rectarum YV, β V, tripla quadrati rectæ Y β; Erunt & quadrata rectarum Y ρ, ρ κ, tripla eiuſdem quadrati rectæ Y β. Quare, b cum quadratis rectarum Y ρ, ρ κ, æquale ſit quadratum rectæ Y κ, c quod angulus Y ρ κ, rectus ſit; Erit & quadratum rectæ Y κ, triplum quadrati rectæ Y β. Rurſus, quia VY, perpendicularis ad AY, Y ρ, d recta eſt ad planum AE, per rectas AY, Y ρ, ductum, rectus erit angulus β Y κ, ex defin. 3. lib 11. e Ac propterea quadratum rectæ β κ, æquale quadratis rectarum Y κ, Y β, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ Y β (quia nimirum quadrata rectarum Y κ, Y β, quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ Y β, cum quadratum rectæ Y κ, triplum ſit oſtenſum quadrati rectæ Y β) Ideoque f cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta β κ, rectæ Y β. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet; Eſt autem & θ κ, dupla ipſius ρ κ, quod minora ſegmenta θ ρ, π ρ, rectarum æqualium M ρ, π ρ, æqualia ſint. g Erit igitur vt Y β, ad ρ κ, ita β κ, dupla ipſius Y β, ad θ κ, duplam ipſius ρ κ; Eſt autem Y β, maius ſegmentum ad ρ κ, rectam minori ſegmento β V, æqualem, vt tota ad maius ſegmentum. Ergo & β κ, ad θ κ, erit vt tota ad maius ſegmentum; Ac proinde θ κ, erit maius ſegmentum rectæ β κ, ſectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus θ κ, maius eſſe ſegmentum

a 4. tertiidec.
b 47. primi.
c 29. primi.
d 4. vndecimi.
e 47. primi.
f 20. ſexti.
g 15. quinti.

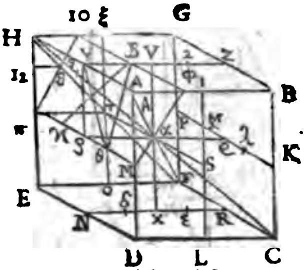
rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione ſectæ, ſi nimirum ducatur recta Y θ. Quare æquales erunt $\beta\theta$, $\beta\kappa$, conſtituentes triangulum Iſoſceles $\beta\theta\kappa$, ſimile illi quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. vt poſtea demonſtrabimus: Ac proinde $\theta\kappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\kappa$, circumſcribente deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib. 4.



Intelligatvr iam planum trianguli $\beta\theta\kappa$, extendi, (ducta per β, recta $\beta\phi$, ipſi M π, parallela) per parallelas M, ϕ 10. vt ſit planum extenſum $\phi\pi$, occurrens diametro AB, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in pũcto 4. & per 3. ducatur 37, recta ipſi A ϕ, parallela, connectaturque MS, *a* quæ parallela eſt vtrique A ϕ, 73. Quoniam igitur per coroll. propoſ. 4. lib 6. triangulum A 73. ſimile eſt triangulo AMS; *b* ac proinde vt AM, ad MS, ita eſt A 7 ad 73. Sunt autem AM, MS. æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad A ϕ, ita M 7. ad 73. Eſt autem A ϕ, maius ſegmentũ rectæ MA, diuiſæ extrema ac media ratione (*c* quod æquales ſint A ϕ, Y β, necnon & MA, YV, dimidia cubi latera) Igitur & 73 hoc eſt, 7 A, maius ſegmentum erit rectæ M 7. extrema ac media ratione ſectæ; *d* Ac propterea tota MA, diuiſa erit extrema ac media ratione in 7. maiuſq; ſegmentum erit M 7. *e* Atqui vt M 7 ad 7. A, ita eſt S. 3. ad 3 A. Secta eſt ergo & SA. extrema ac media ratione in 3 maiuſq; ſegmentum eſt S. 3 *f* Quia vero S ω T, parallela eſt ipſi M π; quod & recta ducta π T, æqualis & parallela ſit ipſi MS: ſi per S ω T, planum ducatur parallelũ plano $\phi\pi$, ducto per M π, *g* ſecabuntur rectæ AS, A ω, in eaſdẽ rationes, in punctis 3 & 4. cũ planũ $\phi\pi$, rectas AS, A ω, ſecet in 3. & 4. at planum per S ω T ductũ plano $\phi\pi$, parallelũ eaſdem ſecet in S, & ω. Atq; idcirco, cũ AS, ſecta ſit in 3. extrema ac media ratione, ſecta erit eodẽ modo A ω, ſemidiameter cubi, in 4. maiuſq; ſegmentũ erit ω 4.

a 33. primi.
b 4 ſex.
c 34 primi.
d 5. tertiidec.
e 2. ſex.
f 33 primi.
g 17. vndecimi.

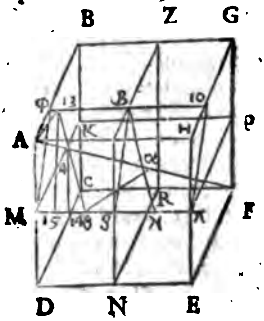
Iisdem argumentis oſtendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, ſemidiametrum cubi ſecari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano $\phi\pi$, vt perſpicuum eſt, ſi cubus inuertatur, vt in hac figura ſecunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino ſimilia lineamentis prioris figuræ licet baſes cubi ſedes mutauerint, ita vt quadratum AC locum quadrati HF: & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac ſecunda figura. Quod tamen in prima figura, ſine hac inuerſione proba-



Probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura: (Hæc deeſt in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum φπ, ſecet in 9. prope punctum H: intelligaturque per rectam AH, planum plano φπ, parallelum. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniunt, ſecanturque planis parallelis in punctis A, H, & 4, 9: (Nam planum φπ, eas ſecat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano φπ, parallelum eaſdem ſecat in A. & H) a erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo α A, ſecta ſit in 4 extrema & media ratione, erit quoque α H, ſimiliter ſecta quæ eidem demonſtratio locum etiam habet in hac cubi inuerſione in ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectæ iungantur θ 4, β 4, θ 9 κ 9, rectilineum β 4, θ κ 9, in plano φπ, exiſtens, pentagonum eſſe æquilaterum, & æquiangulum. a 15. undecimi.

INVERTATVR rurſum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βθκ, ſiue planum φπ, hunc ſitum habeant, quem monſtrat tertia hæc figura. Deinde in plano φπ, recta coniuncta θ 4. extendatur vſque ad rectam φ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, πP, b planum MP, parallelum eſt plano AG, b 15. undecimi. quod & rectæ PK kM, parallelæ ſint rectis GB, BA) c ſecatque cubum bifariam: ideoq; per centrum α, tranſit, per ea quæ in ſcholio propoſ. 39. lib. 11 oſtenſa ſunt: ſi per rectas α 4 A, θ 4 13. planum extendatur, d fient α θ, A 13. communes ſectiones planorum MP, AG, parallelæ: Ac proinde triangula α θ 4. A 34. æquiangula erunt: e Eritque vt α 4. ad 4 A, ita θ 4. ad 4 13. Quare cum α A, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtendimus: eodem modo erit ſecta θ 13. in 4. Rurſus plano NZ, per centrum α, tranſeunti parallelum ducatur planum per punctum 4. ex ſchol propoſ. 15 lib. 11. ſecans φπ, in recta 4.14. f Eſt autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. g Rectæ igitur α A, ρ M, in eaſdem rationes ſecabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M. in 14. ſecta erit extrema ac media ratione, minuſque

c 32. undecimi.

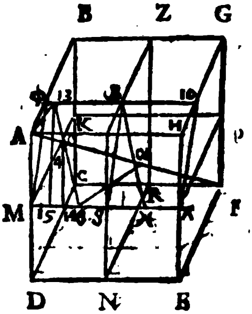


d 16. undecimi.

e 4. ſex.

f 15 undecimi.

g 17. undecimi.



minuſque erit ſegmentum 14M, ideoque æquale minori ρθ, ipſius Mρ. Quare cum ex ς14. maiori ſegmento ipſius ρM, auferatur ςθ. minus ſegmentum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. ς14. diuiſa in θ, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit ςθ. Poſtremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, a ſecabuntur rectæ θ13. θ15. proportionaliter; Ac proinde & θ15. ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit θ14. b Quapropter erit vt ςθ, maius ſegmentum ad θ14. minus ita θ14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem θ14. ad 14 15. ita eſt tota θ15. ad θ14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ρθ, ad θ14 ita θ15. ad eandem θ14. Ac propterea rectæ ρθ, vel ςκ, & θ15. æquales erunt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, ſecantur plano φπ, c erunt communes ſectiones βς, 4. 14. parallelæ, ideoque & 13. 15. βρ, parallelæ erunt, d anguluſque externus βρκ, interno 13. 15 θ. æqualis. Cum igitur & latera βρ, ρκ, lateribus 13. 15. 15 θ, ſint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ βκ, 13θ. Ac proinde & earum ſegmenta maiora θκ, θ4. (Oſtenſum enim eſt θκ, eſſe maius ſegmentum ipſius βκ) æqualia erunt. Eadem arte & β4, ipſi βγ, in prima figura oſtenderetur æqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſin βγ, cuius vertex conſiſtat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eiſdem θκ, βγ, æquales erunt κ9. β9. Æquilaterum ergo eſt pentagonum β4. θκ9. quandoquidem βγ, θκ, rectæ æquales ſunt, cum componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt YV, ZV, πς, Mς. Sed & æquiangulum, vt mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad ſingulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipſi βθκ, ſimilia, & æqualia conſtruantur; (ita enim ad Mπ, duo huiuſmodi triangula vides βθκ, δθκ.) & ipſorum beneficio duodecim pentagona ipſi β4. θκ9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirum in ſingulis, octo vero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quæ ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta 4. & 9 in ſemidiametris Aκ, & Hκ, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cum non omnes eius anguli vel in angulis, vel

a 2. ſext.

b 2. quartidecimi.

c 16. vndecimi.

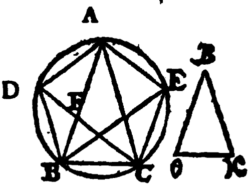
d 29. primi.

e 4. primi.

vel lateribus, vel denique in planis cubi conſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

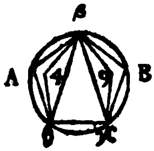
QVOD autem triangulum $\beta\theta x$, cuius baſis θx, maius ſegmentum exiſtat vtriuſque lateris $\beta\theta$, βx, extrema ac media ratione diuiſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles ABC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuiſiſque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propoſ. 11. lib. 4. tradidimus,



ſecentque ſe mutuo rectæ AB, CD, in F. a *Quoniam ergo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſque eius ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC:* b *Erit vt AB, tota ad maius ſuum ſegmentum BC, ita $\beta\theta$, tota ad maius ſuum ſegmentum θx; Eodemque modo, vt tota AC, ad maius ſegmentum CB, ita βx, tota ad maius ſegmentum $x\theta$: Eſt autem quoque vt AB, ad AC, ita $\beta\theta$, ad βx, vtrobique enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur $\beta\theta x$, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula ſunt æqualeſque erunt anguli θ, B; Item x, C, & β, A; proptereaque vterque angulorum θx, duplus erit angulus β; & triangula $\beta\theta x$, ABC, ſimilia.*

a 8. tertii-dec.
b 2. quarti-decimi.

PENTAGONVM vero $\beta 4 \theta x 9$, æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum, hac ratione oſtendemus. Deſcribatur circa triangulum $\beta\theta x$, circulus $\beta A \theta x B$, qui ſi tranſeat per puncta 4, & 9. perſpicuum eſt ex iis, quæ ad propoſ. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum eſſe. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Deſcribatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propoſ. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum $\beta A \theta x B$. Quoniam igitur tam rectæ $A\theta$, $A\beta$, quam rectæ 4θ, 4β, æquales ſunt rectæ θx, cum & $\beta 4 \theta x 9$,



& βA-

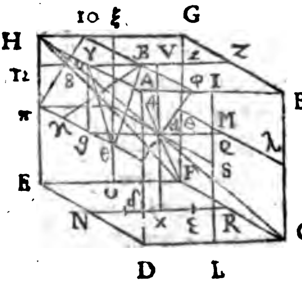
& β A θ κ B, pentagonum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A, θ 4, quam duæ β A, 4 β, æquales quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo circulus triangulo β 9 κ, circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ κ 9, æquiangulum eſt.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.



a 33. primi.

b 29. primi.

c 47. primi.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ε, intelligaturque coniuncta recta γε, a æqualis exiſtens & parallela lateri cubi V X quod & V γ, Xε, æqualis ſint & parallela. Quoniam igitur angulus β V X, rectus eſt: b rectus quoque erit angulus β γ ε ad γ, conſtitutus: c Ac proinde quadratum diametri β ε, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius vero ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti.

d 15. quinti.

IN eadem enim prima figura, d cum ſit vt Y X, ad β V, ita Y Z, dupla ipſius Y V ad β γ, duplam ipſius β V: Sit autem β V, minus ſegmentum ipſius Y V, ſectæ extrema ac media ratione. Erit & β γ, minus ſegmentum lateris cubi Y Z, ſecti extrema ac media ratione: compoſita vero ex Y β, γ Z. hoc eſt, recta β κ (quæ dupla fuit oſtenſa ipſius Y β, ideoque compoſitæ ex Y β. γ Z, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione β γ, eſſe latus Dodecaedri e & β κ, ſeu β θ, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 θ.

e 8. quintidecimi.

III.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus; Dodecaedri

caedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi YZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Yβ, γZ, quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim YZ, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8. propoſ. huius lib. a *Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris YZ, ſectbi extrema ac media ratione: Erit βθ, exiſtens quoque maius ſegmentum eiuſdem lateris YZ, & æqualis duabus Yβ, γZ, ſimul, vt iam demonſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumſcripti.* a 8. tertii dec.

IV.

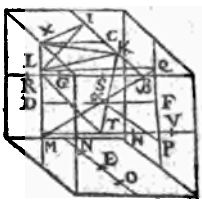
Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θ κ, oppoſiti, b *æqualis eſt rectæ VX (quod & βV, δX, æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.* b 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

In dato cubo Icoſaedrum deſcribere.

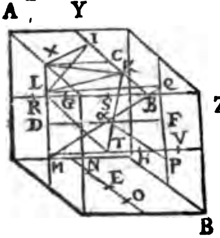
Cvbvs datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrum, ſit AB, per cuius baſium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nuſquam inter ſe conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione ſecentur, ita vt maiora ſegmenta prope centra ſint in punctis I, k: L, M: N, O: P, Q: R, S: T, V: quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus cõnectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R cum L, M, I, & N, &c. vt conſtituantur viginti triangula IkL, IkQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVk, TVO, ILR, ISQ, kTL, kQV, OPV, OTM, NSP, NMR: quorum priora duodecim ſubtenduntur duodecim cubi lateribus, poſteriora vero octo eiuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, Xk, Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia ſunt lateribus XC, Ck, trianguli XCk; & anguli cõtenti, recti, quod XC, c 29. primi.



a 4.*primi.* parallela ſit ipſi AY: *a* Erunt & baſes XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta eſt ad planum AZ, per definit. 4. *lib* 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK, Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI. æqualia ſint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti; *b* æquales erunt baſes LI, LK. Rurſus *c* quoniam quadratum rectæ LI, æquale eſt quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, eſt æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera ſint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale eſt tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla ſunt quadrati rectæ CI, (*d* Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris ſegmenti, tripla ſint quadrati rectæ CI, maioris ſegmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiuſdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum eſt quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cum eiuſdem quadrati rectæ CI, quadruplum ſit quadratum rectæ KI, ex ſcholio propoſ 4 lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum LI, Ik, ideoque & rectæ ipſæ æquales. Æquilaterum igitur eſt triangulum IkL, lateri cubi AG, ſubſtratum.

b 4.*primi.*

c 7.*primi.*



d 4.*tertiidecimi.*

NON aliter oſtendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi ſuppoſita, eſſe æquilatera; Atque adeo inter ſe æqualia, cum eorum latera Ik LM, NO, PQ RS. TV, æqualia ſint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi ſuppoſitorum, communia ſunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo kTL, latus kL, commune eſt triangulo IkL, & latus kT, triangulo TVk, & latus TL, triangulo LMT; perſpicuum eſt, ea quoque eſſe æqualia & inter ſe & dictis duodecim trangulis. Quare omnia viginti huiuſmodi triangula Icoſaedrum component cubo inſcriptum, cum eius anguli omnes duodecim in ſex cubi baſibus conſiſtant, bini nimirum in ſingulis. Itaque in dato cubo Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propoſitiones ſequentes.

DIA

I.

Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis.

Dvcta enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela eſt, & æqualis, quod & DL, FQ, parallelæ ſint, & æquales: b manifeſtum eſt, quadratum diametri QM, æquale eſſe quadratis rectarum LM, lateris Icoſaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icoſaedrum deſcriptum eſt; c cum angulus MLQ. ſit rectus, quod & LDF, ſit rectus. a 33. primi. b 47. primi. c 29. primi.

II.

Bifariæ ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus.

Nam huiuſmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum coniungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeque per coroll. propoſ. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod ſit a, diuidunt. Quod quidem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta a P. Quoniam latera a F. FQ, trianguli a FQ, æqualia ſunt lateribus a F, FP, trianguli a FP, anguloſque comprehendunt rectos, d æquales erunt rectæ a Q, a P. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex a, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur a, centrum eſt Icoſaedri. d 4. primi.

III.

Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

Cvm enim CI, ſit maius ſegmentum rectæ CY: e ſitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipſius CI, ad βY, duplam ipſius CY: f erit quoque KI, latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateris cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, eſſet maius ſegmentum rectæ βY, eſſet βY, ad illam rectam, vt CY, ad CI, hoc eſt, vt βY, ad KI, diuerſum ab illa recta. quod eſt abſurdum. e 15. quinti. f 2. quarti.

IV.

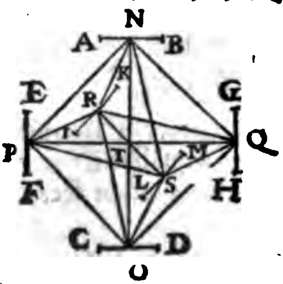
Icosaedri tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

Si enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta rectis diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, anguloſque alternos habentia æquales ex 4. propoſ. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare quælibet latera oppoſita parallela erunt: g Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela. g 15. vndecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

Exponantvr dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum biſarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſeſe in centro T biſariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. præcedentis oſtenſa ſunt: ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ: OP, OR, OS, OQ: PR, PS: QR, QS, conſtituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN: RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualium dimidia) anguloſque continent, rectos, vt dictum eſt: a Æquales erunt baſes NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt & inter ſe æqualia: Ideoque Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in biſariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaque Icoſaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 4. primi.

COROLLARIVM.

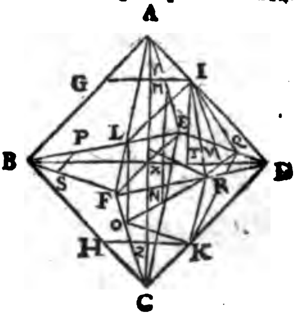
Seqvitvr hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, vbi ſe interſecant, centrum quoque eſt Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.

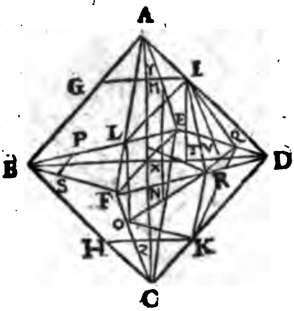
Datvm octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, ſit ABCDEF. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur à ſingulis bina non proxima, ſed ſibi è regione reſpondentia, hoc eſt quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina iuxta angulos oppoſitos eiuſdem quadrati, qualia ſunt BA, BC: DA, DC, iuxta angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD: AF, AE: CE, CF, iuxta angulos oppoſitos A, C quadrati AECF: Nam à quolibet angulo ſumenda ſunt tantum duo latera: at vero latera AB, AD: CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eoſdem angulos A, C, iam ſumpta fuere) EB, ED: FD, FB, iuxta angulos oppoſitos E, F, quadrati EBFD (Nam latera

atera BA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eoſdem angulos
E, F, iam accepta ſunt) quæ omnia ſecentur extrema ac media ra-
tione, hac lege, vt maiora ſegmenta ſint prope angulos, à quibus
grediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R,
S, & a ſingulis ad quinq; proximas ſectiones quinque lineæ rectæ
ducantur, vt ex R, rectæ RQ,
RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ
Q IR, IM, IL, IG, & ſic de cæ-
teris, quamuis non omnes du-
ctæ ſint in figura, ad euitan-
dam linearum confuſionem.
Quæ autem ſint hæc quinque
puncta proxima, pulchre indi-
cat octaedrum materiale. Sunt
enim tria in lateribus reliquis
tribus, quæ cum eo, in quo pun-
ctum acceptum eſt, pyramidem
conſtituunt; alia autem duo



ſunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ
habeat commune illud latus, in quo punctum acceptum eſt. Vt
cum punctum acceptum eſt R, in latere DF, quod cũ tribus DE,
DA, DC, pyramidem conſtituit in vertice D, eſt commune trian-
gulis octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinq; puncta horũ
quinq; laterum ductæ ſunt lineæ rectæ, & ſic de cæteris. Poſt hæc,
ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, ſeſe in centro X, ſe-
cantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib.
quarũ AC, BD, ſecant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq;
recta IV, agaturq; IT, parallela ipſi YX. Quoniã ergo latera DQ,
DI, trianguli DQI, æqualia ſunt lateribus DR, DI, trianguli DRI;
ſunt enim DQ, DR, minora ſegmenta rectarum æqualium DE,
DF) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum
octaedri ADE, ADF; a Erunt baſes IQ IR, æquales. Deinde cum à 4. primi.
b vt BG, ad GA, ita DI ad IA; c erit GI, rectæ BD, parallela. Ea- b 2. quarti
demq; ratione QR, ipſi EF, parallela; d Ac proinde vt DI, ad IA, ita decimi.
XY, ad YA. Recta igitur XA, ſecta erit in Y, extrema ac media ra- c 2. ſexti.
tione. Rurſus quia eſt vt AX, ad XD, ita AY, ad YI (quod triangu- d 4. ſexti.
lum AYI, ſimile ſit triangulo AXD, per coroll. propoſ. 4. lib. 6.) Eſt
autem AX, ipſi XD æqualis; Erit & AY, ipſi YI, æqualis. Quare
YI, minus ſegmentũ eſt rectæ XA. Nõ aliter oſtendemus AY, ipſi
YG, eſſe æqualem; ideoq; GI, rectã bifariam in Y, ſimiliterq; QR,
in V, ſecari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI æqualia ſint
lateribus DQ, DR, trianguli DQR (nimirum minora ſegmenta
maioribus ſegmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehẽ-
dant rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; e æquales erunt e 4 primi.

baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ
Hk, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtendunt reliquos quadra-
torum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet
quadratis binos oppoſitos, complectunturque duo ſegmenta
laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA,
oſtenſum, maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti XY, diuiſi ex-
trema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13.



Eſt autem XY, rectæ XV, æ-
qualis (cum ambæ ſint maiora
ſegmenta æqualium rectarum
a 34. primi. XA, XD) a & YI, rectæ XT: e-
rit XT, maius ſegmentum ipſius
XV, & idcirco TV, ſegmentum
minus, eiuſdem XV. Quare qua-
drata rectarum XV, totius, hoc
b 34. primi. eſt, ipſius IT (b cum & recta IT,
æqualis ſit ipſi XY) & TV, mi-
c 4. tertiidec. noris ſegmenti, c tripla ſunt
quadrati rectæ XT, maioris ſe-
gmenti: Atque adeo quadratum
d 47. primi. rectæ IV, d æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, tri-
plum eſt eiuſdem quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æ-
qualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, di-
midia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato
rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV: erunt quadrata rectarum IV,
e 47. primi. VR, quadrupla quadrati rectæ RV: e At quadratis rectarum
IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR, f quod anguli IVR,
f 8. primi. IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR: IV, VQ, & ſub-
tenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoque recti. Er-
go & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR:
Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectæ VR, quadruplum quo-
que ſit per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR: Æ-
qualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ
æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur
æquilaterum eſt IQR Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera
eſſe triangula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe kQR,
GIL, GIM: GPS, HPS: NHK, OHK: RLO, SLO: PMN,
QMN, atque adeo triangulo IQR æqualia, cum latera omnium
ſint æqualia inter ſe, quod tamen hac etiam ratione demonſtra-
bimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus
ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus
ſegmentis minoribus laterum octaedri: duo vero reliqua ſubten-
dant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum con-
tentos ſingulos duobus ſegmentis laterum Octaedri, maiore &
mino-

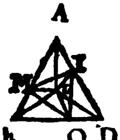
minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per corollarium propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, ſubtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehenſos minoribus ſegmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia ſunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur ſegmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic vero ſegmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non ſecus latera I R, G L, æqualia erunt. Æqualia igitur ſunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propoſ. 8. lib. 1. Atqui I Q R, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur, reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, videlicet G M P, in A E B, H N P, in B E C; K N Q, in C E D; I M Q, in A E D; G L S, in A F B; H O S, in B F C; K O R, in C F D; I L R, in A F D, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triangula, quorũ quina in ſingulis ſectionibus laterum Octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi (vt vides in quinq; R Q I, R I L, R L O, R O K, R K Q, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum, cum Icoſaedri duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmenti. Cum enim in triangulo æquilatero A D E, maius ſegmentum lateris A D, ſit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, oſtenſa æqualis rectæ G I, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti A I, a cum quadratum rectæ G I, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I; perſpicuum eſt, & rectam I Q, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris A I. a 47. *primi.*

COROLLARIVM II.

RVRSVS fit, cum octo Icoſaedri baſes collatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. ſuſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulũ A E D, in quo collocatũ eſt triangulũ Icoſaedri I M Q, ſitq; C, centrũ trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D: C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia ſunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q (quod hæc latera ſint ex cen-



 tro, &

tuo, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) anguloſq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſchol. propoſ 12. lib. 13. oſtendimus. Erunt baſes CM, CQ, æquales. Nō ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficile eſt deniq; ex dictis colligere, idem centrum eſſe Octaedri, atq; ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X. centro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunq; duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis XG, XO. ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli XAG. æqualia ſint lateribus XF. FO. trianguli XFO. (Nam XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FQ, ſegmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac media ratione) anguloſq; complectantur æquales, ſemirectos videlicet (cum AC, EF, diametri ſint quadratorum ABCE, EAFC: ac proinde, per demōſtrata in ſcholio propoſ 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam ſecent.) a Æquales erunt & baſes XG, XQ. Eodemq; argumento oſtendetur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoq; eſt Icoſaedri.

a 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

b INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrum; c & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concentricæ ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ 16. huius lib. Manifeſtū eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem centris octo baſium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin 31. lib. 11. apparere poteſt: Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

b 16. quintidecimi. c 5. quintidecimi.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

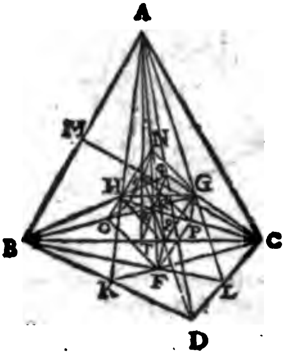
IN data pyramide cubum deſcribere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur deſcribi; ſitq; eius centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, d quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S. Secentur quoq; rectæ ex ſolidis angulis per centrum E, demiſſæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis. quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (cen-

d 15. quartidecimi.

tris,

is, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circum-
antium, ita vt relinquatur cẽtrum illius baſis, in quam perpen-
icularis cadit) rect s lineis coniunguntur, vt N, cum G, H, I; O,
um F, H, I; P, cum F, G, I; & Q,
um F, G, H. Dico ſolidum NF,
ontentum quadrilateris N O,
P, NQ, FG, FH, FI, cubum
ſſe. Cum enim latera AF, FK,
rianguli AFK, æqualia ſint la-
eribus AF, FL, trianguli AFL,
quod FK, FL, cum perpẽdicu-
ares ſint ad BD, CD. ex centro
', ductæ oſtendant æquales di-
tantias rectarũ æqualium BD,
D, à centro F) anguloſq; con-
ineant rectos, ex 3 defin. lib. 11.
a Æquales erunt & baſes AK,
L, & anguli KAF, LAF. Rur- a 4. primi.



us quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia ſunt lateribus
N, AG, tranguli ANG (ſunt enim AH, AG, ſemidiametri tri-
angulorum æqualium ABD, ACD) angulos item compre-
endunt æquales, vt demonſtrauimus; b Æquales erunt ba- b 4. primi.
es NH, NG. Haud ſecus oſtẽdentur æquales rectæ QG, QH,
rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes ſub-
endant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos; vt
erſpicuum eſt. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æ-
ualia ſint lateribus AF, FK. (Sunt namq; FT, FK; diſtantiæ re-
tarum æqualium BC, BD, à centro) & anguli contenti recti, ex
efin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum
tera AN, AI, æqualia ſint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI,
H, ſemidiametri triangulorũ æquilaterorum æqualium ABC,
BD) anguloſq; contineant æquales: c Æquales erunt baſes NI, c 4. primi.
H, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſten-
amus iam, ipſa plana eſſe atque rectangula, vt tandem quadrata
ſſe concludamus, atque adeo componere cubum NF.

ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH,
Q. Quoniam in pyramide latera BC, AD, oppoſita ſunt, hoc
ſt, nõ coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T,
oniungantur recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide
eſcripti, vt conſtat ex figura propoſitionis 2. huius lib. Nam
unctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum
, puncto F, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeun-
a BC, AD. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & O-
aedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit



ST, per E, centrum pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. *a* erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter ſecantur, *b* atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatque latera TS, CS, trianguli TSC (quod quidem pars eſt trianguli BSC) proportionaliter; ideoq; & RS, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus *c* quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC, erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde taliũ 4. tota DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quamobrem reliqua EQ, talium partium erit 1. atq; idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, *d* recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitq; latera ES, ED, trianguli DES (quod quidem pars eſt trianguli AED) proportionaliter, ideoque, cum EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraq; HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R, ſecabitur SE, a rectis HG, NQ; Atq; idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſeſe puncto interſecabunt. *e* Quare in eodẽ ſunt plano, proptereaq; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ; Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

a 18. *quartidecimi.*
b 2. *ſexti.*
c 15. *quartidecimi.*
d 2. *ſexti.*
e 2. *vndecimi.*

CVM oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atq; adeo triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. *f* Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC. Eſt autem SH, tertia pars ipſius SB: Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC, Haud ſecus oſtendemus NQ, tertiam eſſe partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum ſubtendãtur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH, *g* Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quæ circa cum ipſi ſint quatuor rectis æquales, vt oſten-

f 2. *ſexti.*
g 8. *primi.*

t oſtendimus ad propoſ.32, lib.1. recti erunt, ideoq; quadratum erit N Q. Eademq; ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent, qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus, licet impropriè, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in biſariis ſectionibus perpẽdicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.

Aliter. In data pyramide deſcribatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus, factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in centris octo baſium Octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt conſtat ex propoſ 2. huius lib. habentq; eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonſtratione dictum eſt. Ruſſus quia reliquæ quatuor baſes Octaedri parallelę ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2 huius lib. (a cum enim rectæ EG, EH, parallelæ ſint rectis BC, BD; b erunt quoq; triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter ſe parallela, & ſic de cæteris) fit; vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoq; ad illas quatuor reliquas baſes Octaedri perpendiculares, ex ſcolio propoſ. 14. lib. 11. Quare cum prędictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. d Et quia dictæ quatuor baſes Octaedri dimidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis; hoc eſt, biſariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaq; pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 2. *ſext.*
b 15. *undecimi.*
d 17. *undecimi.*

COROLLARIVM I.

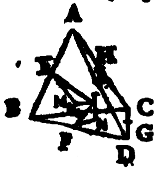
CONSTAT ex his, idem eſſe, centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum, per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit biſarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, ad R, centrum baſis GNHQ, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat: erit recta RS, dupla ipſius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S, & biſarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi RS.

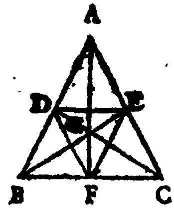
LEMMA.

IDEM autem eſſe centrum Pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti, idemque centrum baſis pyramidis, & baſis Octaedri in ea deſcripti, ita demonſtrabitur. Sit primum pyramis



ABCD, cuius omnia ſex latera biſariam ſecentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro pyramidis in baſes ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas baſes circumſcribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia ſunt lateribus LN, NF, trianguli LNF (cum enim circuli baſes ABD, BCD, circumſcribentes, ſint æquales, æqualiter diſtabunt ipſi à centro L, per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14. Ac propterea eorum diſtantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, diſtantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.

a 4. primi. a Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hiſce æquales erunt, & inter ſe rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propoſ. huius lib. conſtat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea deſcripti.



SIT deinde in baſe pyramidis ABC, baſis Octaedri DEF, quæ ſecabit illius latera biſariam, vt patet ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriuſque baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, nimirum ſemiſſes angulorum æqualium trianguli æquilateri;

b 2. ſexti. b erunt & baſes GD GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis, Igitur G, centrum eſt trianguli DEF, quod eſt propoſitum.

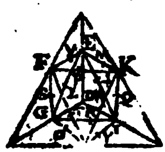
PROBL.

PROBL. 19. PPOPOS. 19.

In data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

Data Pyramidi ABCD, a inſeribatur Octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumantur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum Octaedri cadentia, vt in propoſ 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, IK, HK; HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; EK, IH. in punctis L, M, N. O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quilibet horum punctorum cum quinq; proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptũ erit Icoſaedrũ in dicto Octaedro, vt conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habẽs omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterum Octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſium pyramidis conſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nam in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, deniq; latera IK, KE, EI Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31 lib. 11 cuius quidem quatuor baſes MXQ. ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum

a 2. quartidecimi.



PROBL. 20. PROPOS. 20.

In data pyramide Dodecaedrum deſcribere.

Pyramidi datæ b inſcribatur Icoſaedrum, c & in hoc Dodecaedrum habens viginti ſuos angulos in cẽtris viginti baſium Icoſaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus: conſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icoſaedro inſcripti in quatuor baſib. pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde d quia cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus

b 19. quintidecimi.
c 5 quintidecimi.
d 8. quintidecimi.

pyra-

a 18. quintidecimi. pyramidi inſcriptus, a quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt. quatuor autem reliquos in biſariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem biſariis ſectionibus perpendicularium dictarum; ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorũ bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

xiij. **In dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.**

Ex centro ſphæræ datum ſolidum complectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoq; æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter à centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quolibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum impropriè deſcribitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non propriè in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 19. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt propriè ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta:
b 16. quintidecimi. *b In Octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde c Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro d deſcribitur cubus, cuius octo anguli,*
c 5. quintidecimi.
d 8. quintidecimi.

guli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium Octaedri poſſident: ac propterea & cubus ipſe in Octaedro deſcriptus eſt. a Denique in cubo pyramis includitur, quæ ideo in Octaedro dicetur eſſe deſcripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium Octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis. a 1. quintidecimi.

NEQVE vero prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibique inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. b Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant, c conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri: liquido conſtat ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum ſphæra illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat. b 1. quintidecimi. c 8. quintidecimi.

PARI ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, Octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, vt demonſtratum eſt: in centris quidem, baſium Icoſaedri propoſ. 5. 11. & 12. In centris vero baſium Octaedri propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium pyramidis propoſ. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptionesue quinque ſolidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrum, propoſ. 2. 18. 19. 20. In Octaedro vero, pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 1. 3. 14. 13. In Icoſaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum & Icoſaedrum propoſ. 10. 9. 8. 7. deſcripſimus. At vero poſteriori vnica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus.

LIBER TERTIVS.

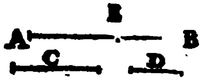
QVEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum; quarum quidem deſcriptionem lib. 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. interſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera; quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D, diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Cum enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docui-

docuimus, Dodecaedrum, cubuſque in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra: Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll.1. propoſ.17. lib.13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti.

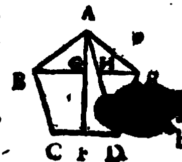


Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ.13. lib.15. ſi dimidatũ latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ.17. lib.12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris ſegmenti AE ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Linea perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

In pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, ſubtendente angulum A, ſecari in G: extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ ſecet BE, in H: quoniam BE, recta lateri CD, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, *a* ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: *b* Atqui AD, in H ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum DH Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



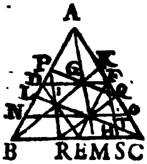
a 2. ſext.
b 18. tertiidec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita ut prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris,

lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alii triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa biſariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit ABC, cuius latera ſecentur biſariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, conſtituentes GHI, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri GHI, hoc eſt rectam BK, tranſire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipſi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis eſt rectæ FH, maiori ſegmento rectæ FE, ſeu DF, ipſi æqualis: (Eſt enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqualium laterum eundem trianguli comprehenſos; *a* ideoque æqualia ſint.) *b* Eſt autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, *c* propterea quod FH, DF, parallelæ ſunt rectis AB, BC, ſeu NO. Igitur recta NO, compoſita ex NH, tota, & HO, maiori ſegmento, *d* ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde cum tres parallelæ BC, NO, DF, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema [illegible] media ratione; Recta autem AM, ex iis, quæ demon[illegible]us ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam AM, tranſire per puncta GH. Haud ſecus oſtendemus Bk, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB: Atque idcirco rectæ Bk, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI.



a 4. pri.
b 34. primi.
c 2. ſex.
d 5. tertii dec.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FH, cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt FO, illi æqualis: *e* Erit quoque FO maius ſegmentum rectæ AF: ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione: *f* Eſt autem vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ...

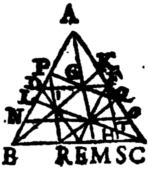
e 5. tertii dec.
f 2. ſex.

GH, ca

GH, ob triangulum AHO; & vt AH, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, ſegmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. quia vero eſt *a* vt AQ, maius ſegmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius ſegmentum; Et eſt AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, maiuſque reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione; atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, *b* æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL; ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex iis, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, *c* ſecans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcriptum eſt triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri GHI. Quapropter ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

a 2. quarti-decimi.
b 4. primi.
c 2. ſex.

COROLLARIVM.



EX his facile colligi poteſt, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. GHI, triangulum ſit Icoſaedri in octaedro, cuius baſis DEF, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, eſt æquale recta FS, parallela rectæ AM, ſecans MC, HO, in S, & T. *d* Cum igitur MC, bifariam ſecetur in S, ob triangulum AMC; *e* ſitque MS, ipſi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori ſegmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales ſint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori ſegmento æqualis: Ideoque EC,

d 2. ſex.
e 34. primi.

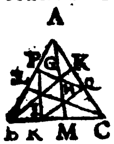
a 2. ſex. — b 34. primi.

in S, ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde *a* quia FE, FS, ſimiliter ſecantur: ſecatur autem FE, extrema ac media ratione, ſecabitur & FS, in T, extrema ac media ratione; maiuſque ſegmentum erit FT, recta *b* æqualis exiſtens lateri Icoſaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icoſaedri octaedro inſcripti maius eſt ſegmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Minvs ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.

Basis Pyramidis ſit ABC, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, baſin Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propoſ. præcedenti demonſtratum eſt. Dico AP, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri HI.



Cum enim PQ. dupla ſit potentia minoris ſegmenti AP, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex ſcholio propoſ. 4. lib 2. quod PQ. recta dupla ſit rectæ PG, hoc eſt, ſibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ. potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP. dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

c 13. tertii-dec. — d 6. tertii-dec. — e 6. tertii-dec. — f 6. dec.

Seqvitvr ex his, latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. *c* Cum enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis: ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, *d* cum diametro potentia ſit commenſurabile. *e* Quare minus ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit. Atque adeo *f* cum minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Latvs cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero Pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

Cvm enim latus Pyramidis in cubo deſcriptæ diameter ſit baſis cubi, vt conſtat ex propoſ.1. lib.15. Sit autem quadratum huius diametri, duplum baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ.47.lib.1. Manifeſtum eſt, latus cubi dimidium eſſe potentia lateris Pyramidis in cubo illo deſcriptæ.

Rvrsvs, quia rectæ coniungentes bifariàs ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, vt liquet ex propoſ. 2. lib.15. Eſt autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifariàs eius ſectiones, cum ea recta æqualis ſit dimidio lateris trianguli, vt conſtat ex corol. propoſ.4. lib.6. a Nam cum ſit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perſpicuum eſt latus pyramidis duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti. a 2. ſexti.

Deniqve b quia diameter ſphæræ, ſeu octaedri, potentia eſt dupla lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro Octaedri ſibi inſcripti, cum diameter octaedri coniungat centra baſium oppoſitarum vt in coroll. propoſ.3 lib.15 diximus: patet, latus cubi potentia eſſe duplum lateris octaedri in eo deſcripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum. b 14. tertii dec.

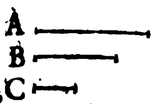
PROBL. 6. PROPOS. 6.

Latvs Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia eſt dimidia lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ.

Cvm enim Pyramis inſcripta cubo, deſcripta ſit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inſcribitur, vt docuimus propoſ.10. libr. Sit autem latus dodecaedri maius ſegmentum, ex coroll.1. propoſ.17. lib.13. lateris cubi, qui in eo deſcribitur; c exiſtat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis ſibi inſcriptæ: aperte colligitur, latus Dodecaedri maius, ſegmentum rectæ eſſe, quæ potētia dimidia eſt lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum. c 5. ſexti decimi.

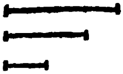
THEOR. 7. PROPOS. 7.

Si in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.



Sit latus cubi A, & latus Icoſaedri in eo deſcripti B, latus deniq; Dodecaedri in eodem cubo deſcripti C. Dico B, latus Icoſaedri medio loco eſſe proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propoſ.14. libr.15. demon-

A
B
C



ſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri maius ſegmentum ſit lateris cubi A; & C. latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcolio propoſ. 13. eiuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi: Planum ſit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

Latvs Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

Cvm enim per ea, quæ in propoſ. 18. lib. 5. ſunt demonſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti (oſtenſum enim eſt ibi, GH, diametrum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partem lateris Pyramidis BC) a Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cum noncupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cum quadratum diametri baſis cubi duplum ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. fit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiuſdem baſis diametri ſit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.

a 20. ſexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Latvs Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

Cvm enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus quoque ſit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inſcribitur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vlt. lib. 15. b Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi ſibi, & Dodecaedro inſcripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

b 8. ſexti-dec.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſae-

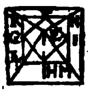
Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

Vt enim conſtat ex propoſ.16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora ſegmenta (qualis fuit ibi recta G I, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehēſum) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare *a* cum hoe ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmēta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum. a 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Latvs Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

Sit vna ſex pyramidum octedri A B C D E, cuius baſis quadratū ABCD, triangula vero ad E, verticem, ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratū cubi in octaedro deſcripti, vt demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ. 18. lib. 14 qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: *b* Atqui vt EO, ad EH, ita eſt EB, ad EL. igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9 & quadratum rectæ LM, nimirum KL, MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum ſit quadrati GI, ſibi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. demonſtrauimus. Eſt enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, deſcriptum; *c* cum GI, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri L M. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum. b 2. ſexti. c 33. primi.



COROLLARIVM.

Qvia vero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum efficit maius ſegmentum latus Dodec[illegible]i inſcribitur, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 15. inſcribunturque Dod[illegible]m, & cubus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, vt docuimus in ſch[illegible]opoſ. vltimæ. lib. 15. perſpicuum ſit, octaedri latus eſſe potentia qu[illegible]plum ſeſquialterum eius rectæ extrema

 ac me-

ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem Octaedro inſcripti: eius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum biſarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ. 14. lib 15. eiuſque ſcholio: Et in biſarijs ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. libr. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoq; idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. *a* Atqui diameter ſphæræ ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmētum eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

a 14 *tertiidec.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionē habet, quem minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

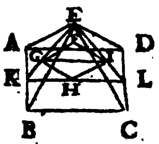
OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. libr. 15. minus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius ſegmētum vel maioris ſegmenti ad minus (quod tota linea, maius ſegmentum, atque minus, ſint tres rectæ continuè proportionales) liquido conſtat, proportionem la[illegible]bi ad latus dodecaedri ipſo deſcripti eſſe quoque proport[illegible]maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

Præterea, cum conſtet ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. maius ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuiſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtum eſt eſſe vt latus Dodecaedri, hoc eſt, maius ſegmentum, ad latus cubi in ipſo deſcripti, hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad maius. Cum enim ſit, vt tota linea ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius ſegmentum ad totam lineam, ita ſegmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

Latvs Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

Sit vna ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius baſis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, ſint ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra, F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro deſcripti conſtituentibus, vt docuimus in propoſ. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo deſcripta, deſcribitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. expoſuimus, Eſtque latus pyramidis in cubo deſcriptæ diameter baſis cubi, vt conſtat ex propoſ. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus pyramidis in Octaedro dicto deſcriptæ. Dico igitur latus Octaedri BC, ſeſquialterum eſſe lateris Pyramidis GI, Ductis enim rectis



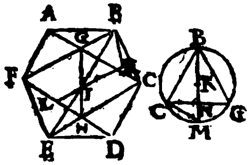
GK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. ipſæque EK, EL, ſeſquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propoſ. 18. libr. 14. a Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propoſ. 4 lib. 6. triangulum EGI, ſimile triangulo EKL. Quare erit vt EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI, idcirco cum EK, ſeſquialtera ſit ipſius EG, erit & KL, ſeſquialtera ipſius GI. b Cum ergo BC, æqualis ſit ipſi KL, quod & BK, CL, æquales ſint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri ſeſquialteri lateris pyramidis GI, ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandũ. a 2. ſexti. b 33. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri.

Sit Icoſaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, &

centrum I; triangula vero oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorũ centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10 lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per ſcholium propoſ. 14. libr. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, vt conſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque IK, IL, ſemidiametri æquales. Coniuncta autem KB, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis; erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11.



a 74. primi. *a* Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri BI, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarũ rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris BK, KI, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL (*b* quod triplum eſt quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icoſaedri BE, remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circum ſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extenſaq; BK, vſque ad M, quæ ſecet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta perpẽdicularis eſt ad CG, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. *c* erit recta BC, potentia ſeſquitertia rectæ BN. Vt autem BC, ad BN, ita eſt BM, ad BC, quod BC, ſit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. *d* cum angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur BM, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, ſeſquitertium eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 15. tertiidec.

c 12. quartidecimi.

d 31. tertii.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambien-

bientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri SE, æquale eſſe quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum B G G. circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, *a* duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, vt manifeſtum eſt ex propoſ. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones coniungentis diuiſæ extrema ac media ratione minus ſegmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propoſ. 17. libr. 13. Liquet, latus dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplũ poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmõdi recta coniungat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaq; latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum. a 14. *tertii-dec.*

THEOR. 17. PROPOS. 17.

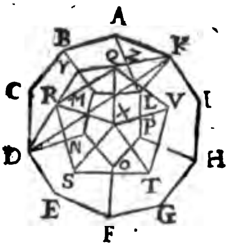
DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodem Icoſaedro deſcribantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ libr. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidem circumdantis: *b* Poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateri Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſin Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris Icoſaedri, vt in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circumdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſin Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum. a 13. *tertii-decimi.*

THEOR. 18. PROPOS. 18.

Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdē lineæ inter centrum pentagoni & latus eiuſdem poſitæ.

Sit dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum cētra Q, R, S, T, V, X (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componētia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. libr. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſium BM, per cētra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 1 propoſitionis 10. libr. 13. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur *a* perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione.



a 2. *ſexti-decimi.*

Dico ita eſſe latus Dodecaedri LM, ad Latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt KZ minus ſegmentum perpēdicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodem ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) *b* parallela erit QR, ipſi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4. libr. 6. *c* Quamobrem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. *d* Vt autem DK, tota ad totam KY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KY, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmētum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus &c. Quod erat demonſtrandum.

b 2. *ſexti.*
c 4. *ſex.*
d 2. *quartidecimi.*

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minuſque eius ſegmentum à toto latere Icoſaedri ſublatum; à reliqua quoque recta parte rurſum tertia detracta; Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

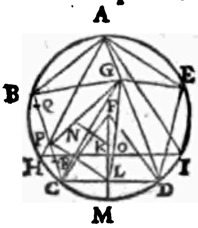
Circa pentagonum A B C D E, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrum F; & ſuper quinq; latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex iis quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inſcribatur A H I. Quoniam igitur arcus A B C, A E D, æquales ſunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus A B H, A E I, cum ſint tertiæ partes eiuſdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus H C, I D, æquales; proptereaq; rectæ H I, C D, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur F K L, a ſecans rectas H I, C D, bifariam in K, & L; coniungãturq; rectæ F C, F D.



a 3. tertij.

Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum G B C, G C D, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur G N P, G O L, dividentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13 latera oppoſita B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta G O, in punctum L, in quo diuiſa eſt C D, bifariam, cadet. Iunguntur autem centra N, O, recta N O. quæ, vt conſtat ex demõſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icoſaedro ſcripti. Deniq; B P, dimidium lateris Icoſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento B Q, ex toto latere B C, reliquæ C Q, tertia pars detrahatur C R. Dico reliquam Q R, æqualem eſſe lateri Dodecaedri N O. Cum enim F L, perpendicularis à latere trianguli æquilateri H I, ſecetur in K, extrema ac media ratione (quod F L, ac ratione ſecta faciat maius ſegmẽtum æquale perpendiculari F K, per coroll. propoſ 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento F K, æqualis recta K M, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ 5. libr. 13. maius ſegmentum K M, ſectum quoque in L, à minori ſegmento K L, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F L, minore dimidiæ ſuiipſius ſegmento L M. Quoniam vero iuncta P L, eſt latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, deſcri-

deſcripti, idemque centrum F, habentis, ex ſcholio vltimo lib 4. ideoque ſimilis illi: erunt triangula FCD, FPL (ſi recta ducetetur FP) ſimilia, per ſcholium propoſ. 20. lib. 6. Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP; Atqui FC, hoc eſt, ſibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore ſegmẽto dimidij ipſius FM, nempe minore ſegmento rectæ KM, vt oſtendimus. Recta igitur CD, vel ſibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore ſegmẽto dimidij ipſius BC, nimirum minore ſegmento rectæ BP, quod fuit PQ; ideoque reliqua CQ. rectæ PL, æqualis erit. Rurſus quia GP, GL, proportionaliter ſecantur in centris NO (quod GN, GO, du[illegible]ſint ipſarum NP, OL, per coroll. propoſ. 18. lib. 14) a parallel[illegible]unt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. b Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Eſt autẽ GP, ipſius GN, ſeſquialtera, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc eſt, ſibi æqualis CQ. ſeſquialtera erit ipſius NO; Ac proinde, cum CQ. ſeſquialtera quoque ſit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. eſt CQ, talium 1. eſt CR, per cõſtructionẽ; Ac propterea earundẽ 2. QR) æqualis erit QR, ipſi NO, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaq; lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

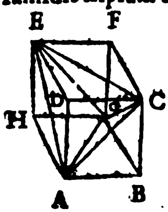


a 2. ſexti.
b 4. ſexti.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

Cvbvs ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.

In cubo AF, deſcripta ſit pyramis ACBG. Dico cubum pyramidis triplum eſſe. Cum enim inſcriptam pyramidem æquilateram circumſtent quatuor pyramides fundatæ ſuper quatuor baſes ipſius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non reſident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inſcriptæ: (Nam ſuper baſin ACE, fundatur pyramis ACED; ſuper baſin AEG, pyramis AEGH; ſuper baſin CEG, pyramis AEGF; & ſuper baſin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10. definitione libri vndecimi, cum contineantur planis ſimilibus æqualibuſque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim conſtat tribus æqualibus & ſimili-



ſimilibus triangulis, dimidiis ſcilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptæ) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum ſextuplus (Nam exempli cauſa, pyramis ABCG, baſin habens ABC, dimidium baſis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars eſt, per coroll. 1. propoſ. 17. lib. 12. priſmatis eandem baſin, & altitudinem habentis. a Cum igitur cubus duplus ſit eiuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtum eſt pyramidem ABCG, ſextam partem eſſe cubi, propterea cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumſtantes, quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inſcriptam eiuſdem cubi tertiam eſſe partem. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 32. vndecimi.

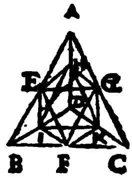
ALITER. Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. b Cubus vero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcriptæ, vt demonſtratum eſt; perſpicue colligitur, cubum triplum eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem ſphæra, in qua cubus, continetur.

b 32. quartidecimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum EIKGHF, Dico pyramidem octaedri eſſe duplam. Cum enim octaedrum circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, vt propoſ. 3 lib. 15. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſque numero & magnitudine quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ ABCD, per corollar. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) c Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum (cum octupla proportio ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perſpicue apparet) hoc eſt, qualibet



bet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis AB-CD: Atq; idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcriptio octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

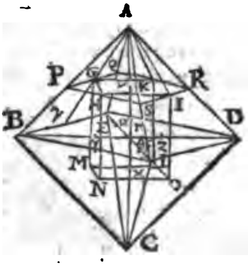
QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum: octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15. *a* Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, *b* & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla: Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2 ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum: atque adeo cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 20. *ſextidec.*
b 21. *ſextidec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.

IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIKLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor baſium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum conſtituentes PQRS, vt in propoſ. 4. lib. 15. eſt demonſtratum: *c* quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. Propoſ. 4. lib 13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GL, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ. 14 lib. 11. Eſt autem V, centrum quadrati PQRS; *d* (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela ſecent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter: erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium



c 15. *undecimi.*
d 17. *undecimi.*
e 47. *primi.*

AP, AQ

AP, AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP, AV, VQ quod anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ propterea que & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſchol. vltimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Necnon & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. a Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modò dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: necnon VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 15. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſeſe bifariam ſecent in centro. Iam vero quoniam VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla autem fuit & AV, eiuſdem VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. cum vtriuſque eadem ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX: b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK: illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. cum triangula huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6 triangulis illius) c proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterum, quod recta Aγ, d proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. eſſe cubum GO, iam demonſtratum eſt. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) ſicut octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet;

a 17. vndecimi.

b 6. duodecimi.

c 8. duodecimi.

d 2. ſexti.

habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib.7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atque cubi ſibi inſcripti. Oſtendimus enim T, vtriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. *a* Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram, quam videlicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum.

a 11. *ſextidec.*

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

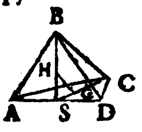
QVONIAM vt oſtendimus ad finem lib.15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur; *b* Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & cubus ſibi ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis *c* triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc eſt, tredecuplam ſeſquialteram Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

b 23. *ſextidec.*
c 20. *ſextidec.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidem cubi eſſe noncuplam. Aſſumantur enim GH, centra



duarum baſium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib.15. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa vero recta GH, cum BH, CG, duplæ ſint rectarum HS, GS, ex coroll. propoſ. 18. lib.14. ac proinde proportionaliter ſecentur BS, CS, *d* parallelæ erunt BC, HG, & per coroll propoſ. 4. lib.6. triangulum HGS, triangulo BCS, ſimile. *e* Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita

d 2 *ſex.*
e 4. *ſex.*

CS, ad

S, ad GS: *a* Eſt autem CS, ipſius GS, tripla. Igitur & BC, tripla tit ipſius HG. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cu- o diameter eſt baſis cubi, vt in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum ſt: Recta vero connectens duo centra baſium pyramidis com- nune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide de- ripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (Ibi nim recta GH, iungens centra G, H, baſium ACD, ABD, com- nune latus AD, habentium diameter fuit baſis GNHQ, cubi de- ripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter baſis cubi yramidem ABCD, circumſcribentis: GH, vero diameter baſis ubi in eadem pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant oportionem diametri quadratorum, quam latera. (Eſt enim vt iameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius qua- rati ad ſuum latus, quod proportio vtraque ſit potentia dupla: ermutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. el ſic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipſum quadra- m eſt, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipſum qua- atum, cum vtrobiq; ſit proportio dupla. *b* Igitur erit quoque ameter ad latus, vt diameter ad latus Ergo permutando, vt dia- eter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat aũt BC, diameter ſis cubi circumſcripti ad GH, diametrum baſis cubi inſcripti oportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoq; latus cubi reumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At ro cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, *c* proportionẽ habent erum homologorũ triplicatam. Cubus igitur circumſcriptum cubum inſcriptum pyramidi ABC, proportionẽ habet, quam ad 1. Hæc n. proportio triplicata eſt triplæ proportionis, vt hic 9. 27. videre licet. Quam ob rem, *d* cum cubus ad pyramidem criptam proportionem habeat quã 27. ad 9. videlicet triplam; bebit pyramis ABDC, ad cubũ ſibi inſcriptum proportionem, am 9. ad 1. nimirum nõcuplam; Atq; adeo pyramis ſibi inſcri- cubi nõncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 18. *quartidecimi.*
b 22. *ſexti.*
c 33. *vndecimi.*
d 20. *ſextidec.*

COROLLARIVM.

GITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo cribitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum t propoſ. 35. lib. 11. in demonſtratione huius propoſitionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum pro- rtionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque ſes Icoſaedri.

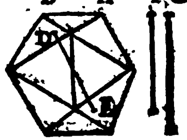
IN Octaedro ABCDEF, concipiatur deſcriptum Icoſae- m, Dico Octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes oc-

ctaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cum enim, vt ex demonſtratis in propoſ.16. libr.15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur: ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, KLM, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, BCF; atque ex N, centro octaedri, necnon & Icoſaedri (idem enim vtriuſque eſt centrum, per coroll.3.propoſ.16. libr.15.) ad baſin A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll.lemm.1.propoſ.10.lib.14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli GHI, per coroll.2. propoſ.16.lib.15. Cum ergo plana oppoſita ADE, B C F, parallela ſint, ex coroll.4.propoſ.14.lib.13. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſ.14 lib.11.ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare O P, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20.pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O. Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſin, & altitudinem habentis, per coroll.1.propoſ.7.lib.12. Erit priſma, cuius baſis ADE, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero priſma, cuius eadem baſis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem ADE, altitudo vero ON, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib.11. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis ADE, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſin ADE, & ſub altitudine O P; conſtituti: priſma videl. cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo vero eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem ADE, & ſub altitudine O P, cum per ea, quæ docuimus ad propoſ.7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtrabimus priſma cuius baſis G H I, altitudo vero O P, æquales eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: propterea que triplum huius priſmatis; nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis G H I, altitudo autem eadem O P, æquale eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem



GHI,

GHI, & ſub altitudine OP, conſtituti: priſma ſcilicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI; altitudo vero eadem OP. Atque idcirco duo priſmata, quorum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius vero baſis tertia pars baſis GHI & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro deſcripto. Iam vero, cum duo illa priſmata, octaedro æqualia, ad duo hæc priſmata, Icoſaedro æqualia ſint, per ea, quæ oſtendimus ad propoſ. 7. libr. 12. vt baſes priſmatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes (cum vnius baſis ſit ADE, nempe tres tertiæ partes ipſius ADE; complectens, alterius vero baſis tertia pars ipſius ADE) ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes (cum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipſius GHI, continens, alterius vero baſis tertia pars ipſius GHI.) Sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI; a ita duæ tertiæ partes ipſius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipſius GHI, hoc eſt, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipſius ADE, ad quinque tertias partes ipſius GHI, ita quoque ſint, ex ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. libr. 5. ſex tertiæ partes ipſius ADE (hoc eſt, duæ baſes octaedri triplum duarum tertiarum vnius baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipſius GHI (id eſt, ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum vnius baſis complectentes, cum quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa priſmata, octaedro æqualia, hoc eſt, ipſummet octaedrum, ad duo hæc priſmata Icoſaedro æqualia, nempe ad ipſummet Icoſaedrum, vt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quocirca octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quod erat demonſtrandum.



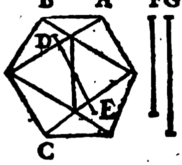
a 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum in Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam

habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat centra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectam DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit



DE, diameter Dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti, cum complect angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC: Dodecaedro diametri AC, hoc eſt, in eadem ſphæra, in qua Icoſaedrum ABC, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter: & Dodecaedro diametri DE, intra Icoſaedrum videlicet ABC, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis nempe Icoſaedri ABC, ad tertiam videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, ſibi inſcriptum, componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icoſaedro ABC, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem ſphæra comprehenſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi (a Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icoſaedrum ABC, eiuſdem diametri eſt, vt G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, vt F, latus Icoſaedri ad G latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiuſdem diametri AC, ad Dodecaedrũ diametri DE, in Icoſaedro videlicet ABC, deſcriptum, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem, ex coroll. propoſ. 7. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum diametri DE, componi quoque ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum

a 11. quartidecimi.

pro

proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtandum.

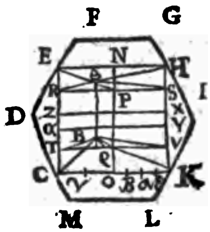
THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

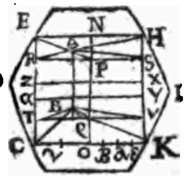
QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B K L M C, conuenientia ad latus AB; duo quidem A B C D E, A H I K B, ſecundum latus idem commune AB, alia autem duo A E F G H, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C K H, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet C B K H A E, conſtans quinq; planis C B K, EAH, B C E, A B K H, E C K H; quorum duo C B K, EAH. *a* triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni B C, B K, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque; cum enim & pentagona A B C D E, A B K L I, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata C D E, H I K, *b* æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia, & æqualia, per 10. defin. libr. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, qualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit à C E H K, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi C K, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris

a 4. *primi.*

b 4. *primi.*



ris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaque recta N O, quæ parallela eſt lateri pentagoni A B, & in quam cadunt perpẽdiculares A P, BQ, demiſſæ in planum EK, vt conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, B Q, huius figuræ lineas L N, V X, V R, X S, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propoſ. 17. libr. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atq; adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorũdem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, A S, B T, B V, conſtituantur duæ Pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cum & earum baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. *a* Quoniam autem A S, ipſi B V, & A R, ipſi B T. æqualis eſt, & parallela, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT. *b* parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll. propoſ. 8. libr 1. cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS. BTV, & tribus parallelogramis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.



a 33 *primi.*

b 15. *undecimi.*

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY. tertia vero pars ſit XY, ducanturq; XZY α, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; *c* vtriuſq; vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, *d* quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Æqualis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demõſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ A B, æqualis ipſi VX, duas tertias partes continet priſma, cuius baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars

c 4. *duodecimi.*

d 1. *ſexti.*

rectæ

rectæ AB, æqualis ipſi VY, ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. a quod & a 1. ſexti.
baſis TY, duas partes tertias complectatur baſis TX. Igitur &
priſma, cuius baſis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ
AB, æqualis ipſi VY, æquale erit duabus pyramidibus BRSHA,
CTVKB; Ac proinde hoc priſma oppoſitum priſmati ABTV-
SR, efficiet priſma æquale ſolido CBKHAB, habens baſin rectan-
gulum contentum ſub latere cubi TV, & ſub recta compoſita ex
VY, duas tertias partes minoris ſegmenti VX, comprehendente,
& ex VS, maiore ſegmento, ideoque à baſe cubi deficientem re-
ctangulo αX, côtento ſub latere cubi αY, & ſub XY, tertia parte
minoris ſegmenti VX. Non diſſimili ratione inueſtigabimus alia
ſimilia quinq; priſmata æqualia & proxime dicto priſmati, & re-
liquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſti-
tutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſoli-
dis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum.
Quia autem duo quælibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata,
componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruen-
tur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitu-
dine QB, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB, ſeu
maioris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes à baſe cubi deficien-
tes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia par-
te minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tri-
bus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurgens parallelepi-
pedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum
æquale, cuius baſis à baſe cubi deficit rectangulo contento ſub
latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris
cubi, altitudo vero æqualis eſt tribus altitudinibus prædicto-
rum trium parallelepipedorũ, hoc eſt, altitudini QB, quæ æ-
qualis fuit dimidio maioris ſegmenti lateris cubi, ter ſumptæ.
Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, ſeu latere cubi defi-
cere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſe-
gmentum minus exiſtit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema
ac media ratione in β: itemq; Cβ, maius ſegmentũ, & βK, minus
bifariam in γ, δ; atque ex βK, abſcindatur βι, æqualis ipſi βγ ſeu
Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βι, dimidia pars minoris ſegmenti Cβ,
æqualis ſit ipſi QB; & Cι, toti altitudini præfati parallelepipedi.
Poteſt autem ex minori ſegmento βK, abſcindi recta æqualis ipſi
Cγ, dimidio maioris ſegmẽti; quia βk, maior eſt, quã dimidium
maioris ſegmenti Cβ Cum enim ſit, vt Ck, ad Cβ, ita Cβ, ad βk;
ſit autem CK, minor, quam dupla ipſius Cβ, quod Cβ, ſit ipſius
maius ſegmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ip-
ſius βK, hoc eſt, erit βK, maior, quam dimidium ipſius Cβ.
Quoniam igitur eſt, vt tota CK, ad maius ſegmẽtum Cβ, ita ma-
ius ſegmentum Cβ, ad minus βK; b erit quoque vt CO, dimidia b 15. quinti.

ipſius CL, ad $C\gamma$, vel $\beta\epsilon$, dimidiam ipſius $C\beta$, ita $C\gamma$, vel $\beta\epsilon$ ad $\beta\delta$, dimidiam ipſius βK; Ac proinde ſi CO, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum $C\gamma$, vel $C\epsilon$, & minus $\beta\delta$. Quare & $\beta\delta$, minus ſegmentum ſecabit $\beta\epsilon$, maius ſegmentũ extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. eritq́; maius ſegmentum $\beta\delta$, minus autem $\delta\epsilon$; Ac propterea rurſus $\delta\epsilon$, minus ſegmentum ſecabit rectam δK, maiori ſegmento $\beta\delta$, æqualem, extrema ac media ratione, minuſque ſegmentum erit ϵK. Deficit igitur $C\epsilon$, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi CK, minore ſegmento ϵK, rectæ δK, vel ſibi æqualis rectæ $\beta\delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmentum minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum cubum, à baſe cubi deficere rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens quam cubus, altitudo vero à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius parallelopipedũ; compoſitum erit parallelepipedũ prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidẽ & baſis, & altitudo parallelepipedi æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituitur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, imo vero alter cubus, vt demonſtratum eſt.

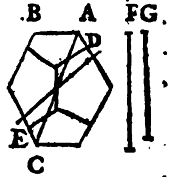
THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quã habet diameter Dodecaedri ad rectam

centri

centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

In Dodecaedro A B C, diameter ſit AC, & recta coniungens centra baſium oppoſitarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicta proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri. Cum enim anguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in centris baſium oppoſitarum; erit recta DE, centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem ſphæra cum Icoſaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato deſcribetur, cum eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icoſaedro eiuſdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet ABC, deſcripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem; componetur per ea, quæ ad defin. 5 libr. 6. à nobis ſunt demonſtrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, deſcripti ſecundæ magnitudis ad Icoſaedrum in Dodecaedro A B C, deſcriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ac diametrum DE, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. *a* Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icoſaedrum eiuſdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro A B C, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaq; ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 11. *quartidecimi.*

THEOR. 30. PROPOS. 30.

Dodecaedrvm Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique à latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdẽ ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

Qvoniam in Dodecaedro intra Pyramidem deſcripto cubus deſcribatur, hic idem cubus in eadẽ pyramide eſt deſcriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus aũt pyramidis, in qua deſcribitur, nona pars eſt, a cum pyramis cubi ſibi inſcripti ſit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, ſeu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta eſt in verbis propoſitionis huius; non obſcure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes continere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 25. ſexti-decimi.

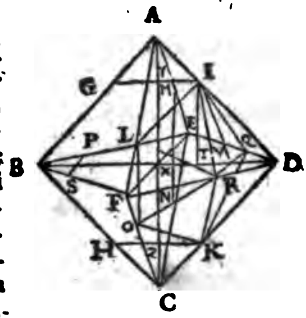
THEOR. 31. PROPOS. 31.

Octaedrvm excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

Octaedrvm, cui inſcriptum eſt Icoſaedrum, ſit ABCDEF, repetita figura propoſ. 16. libr 15. vbi demonſtratum eſt, viginti triangula Icoſaedrum inſcriptum componentia eſſe IOR. KQR,

KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo poſtrema octo baſibus Octaedri ſunt impoſita, ſecantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem eſſe maiori ſegmento XY, ſemidiametri AX. Dico octaedrum ABC DEF, ſuperare Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratũ lateris Icoſaedri QR, altitudo vero IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX. Cum enim in quatuor baſibus Octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum ſolidum Octaedri D, conſtituentibus poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum ſolidum D, in eiſdem quatuor baſibus Octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus ſi accedant duo triangula Icoſaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, conſtituentur duæ pyramides ſuper communem baſem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. 5. lib. 12. cum earũ altitudo ſit recta eadem IT, maius videlicet ſegmentum ſemidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum AX, ſecta eſt à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; ſecta eſt CX, à recta HK, in Z. Quare ſi ex K, ad BD, perpendicularis ducantur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, a erit ea æqualis rectæ ZX, maiori ſegmento ſemidiametri CX, hoc eſt, ipſi IT) Quæ quidem pyramides extra Icoſaedrum in octaedro deſcriptum conſiſtunt. Similimodo prope ſingulos reliquos quinq; angulos octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe, & dictis duabus æquales extra Icoſaedrũ prędictum: ita vt Octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum, duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium eſt quadrati lateris DQ (Cum DQ, DR, rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius QR, duplum erit quadrati lateris DQ; ideoq; quadruplum trianguli DQR. Priſma igitur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit priſmatis, cuius baſis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 7 libr 12. Priſma autem, cuius baſis DQR, & altitudo IT, triplum exiſtens, ex coroll. 1. propoſ 7. lib. 12. pyramidis IDQR,

a 34 primi.



ID QR, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, vel parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque eſt trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrum ambientes; Æquale quoque erit priſma, ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptum; Ac proinde Octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens. Cum enim ex demonſtratis propoſ. 19. libr. 15. conſtet, ſi Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icoſaedrum imponatur, Icoſaedrum eidem Pyramidi eſſe inſcriptum: *a* Octaedrum autem ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri, recta videlicet IT, ſeu YX: Fit, vt Octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur (*b* quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti Octaedri) ſuperet duplum Icoſaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens biſarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata à nobis in ſcholio propoſ. 14. libr. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramidis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

a 31. ſext.

b 21. ſextidecimi.

DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM deſcriptione in data ſphæra ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem à ſphæra comprehendi, noua demonſtratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cum eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam conſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda ſunt, quorum aliqua etſi per elementa ſphærica Theodoſii demonſtrantur, non tamen pro-

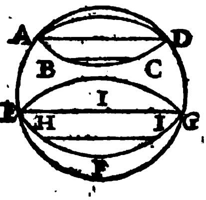
pterea

perta ordinem Euclidis peruerterete cenſeri poſſumus: quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant: vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. In citandis autem Theodoſii propoſitionibus ſequemur ordinem noſtrorum commentariorum, quos in eadem elementa conſcripſimus. Hinc ergo initium ſumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli ABCD, EFG: ſitque primum in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda ſit diameter parallela. Ducatur vt in ſcholio propoſ. 18. libr. 11. docuimus per diametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, a *faciens in ſphæræ ſuperficie circulum AEGD.* a 1.1. Theo.



Quoniam igitur circulus AEGD, circulum ABCD, biſariam, & ad angulos rectos ſecat, erit circulus AEGD, maximus, tranſibitque per polos circuli ABCD, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, b *cum paralleli eoſdem polos habeant:* c *ideoque eum biſariam ſecabit. Communis ergo ſectio EG, eius diameter erit:* d *quæ cum ſit ipſi AD, parallela patet propoſitum.*

b 1.2. Theo.
c 15.1. Theo.
d 16. undecimi.

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, non ſit eius diameter, cui ducenda ſit diameter parallela in circulo EFG. e *Ducatur ipſi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD: cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime oſtendimus. Quoniam igitur vtraque BC, EG, eidem AD, parallela eſt, ex conſtructione,* f *ipſa quoque BC, EG, inter ſe parallela erunt. Quod eſt propoſitum.*

e 31. primi.
f 9. undecimi.

EADEM ratione recta BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, à diametro EG, diuerſa quæ ipſi BC, æqualis ſit, ſi modo BC, maior non ſit diametro EG. Nam ſi in circulo EFG, ducatur ipſi BC, parallela HI, & æqualis, vt propoſ. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

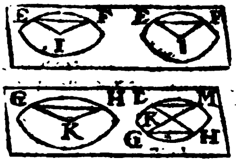
LEMMA II.

SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abſcindant arcus ſimiles; erunt

erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis AB, CD, *deſcripti ſint duo circuli, in quibus rectæ* EF, GH, *primum parallelæ ſint, ad eaſdem partes centrorum* I, K, *auferanturque arcus ſimiles* EF, GH, *ac tandem iungantur ad centra rectæ* EI, FI, GK, HK.

A



B

C

D

Dico tam EI, GK, *quam* FI, HK, *parallelas eſſe. Quoniam enim arcus* EF, GH, *ſimiles ſunt, erunt anguli* I, K, *æquales, ex ſcholio propoſ. 22. lib. 3. a Igitur reliqui anguli* E, F, *reliquis angulis* G, H, *æquales erunt. b Cum ergo tam illi, quam hi, ſint inter ſe æquales: erit tam angulus* E, *angulo* G, *quam angulus* F, *angulo* H, *æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ* EF, GH, *parallelæ ſunt, & rectæ* EI, GK, *ad eaſdem partes plani per* EF, GH, *ducti efficiunt cum ipſis æquales angulos* E, G: *erunt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 16 lib. 11. demonſtrauimus,* EI, GK, *parallelæ. Eademque ratione* FI, HK, *parallelæ erunt.*

a 32. primi.
b 5. primi.

DEINDE ſint EF, GH, *parallelæ, non ad eaſdem partes centrorum* I, K. *Dico tam* EI, HK, *quam* FI, GK, *eſſe parallelas. Productis enim* GK, HK, *iungatur recta* LM. *Et quia latera* GK, HK, *lateribus* LK, MK, *ſunt æqualia; c anguloſque ad verticem* K, *æquales continent: d erunt & baſes* GH, LM, *& anguli* H, L, *æquales; & anguli* G, M. *e Igitur arcus* GH, LM, *æquales ſunt, f & rectæ* GH, LM *inter ſe parallelæ: Ac propterea cum vtraque* EF, LM, *ipſi* GH, *ſit parallela; g erunt & EF, LM, parallelæ inter ſe. Quia igitur* EF, LM, *parallelæ ſunt abſcindentes ad eaſdem partes centrorum arcus ſimiles* EF, LM. *(Nam cum arcus* GH, *ſit arcui* EF, *ſimilis; erit quoque arcus* LM, *qui arcui* GH, *æqualis eſt, eidem arcui* EF, *ſimilis) erunt tam* EI, LK: *hoc eſt,* EI, HK, *quam* FI, MK: *hoc eſt,* FI, GK, *parallelæ. Quod eſt propoſitum.*

c 14. primi.
d 4. primi.
e 28. tertii.
f 27. primi.
g 9. vndeci.

LEMMA III.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus ſint*

ſint illis rectæ æquales & parallelæ AB, CD, ad eaſdem partes centrorum, quarum extrema iungantur ad eaſdem partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt: a erunt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Quare cum AB, CD, ſint etiam æquales: b æquales quoq; erunt ac parallelæ AC, BD, quod eſt primum.



a 7. undecimi.
b 33. primi.

EX centris deinde E, F, ductis rectis EA, EB, FC, FD, iunctaque recta EF: erunt tam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales. d Quoniam vero circuli AB, CD, paralleli circa eoſdem polos ſunt, e recta per eorum polos ducta tranſibit per eorundem centra, & per centrum ſphæræ; & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum ſphæræ incedet; ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta per eorum polos extenſa, quod eſt abſurdum. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum commune EF. f Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, recta eſt: g At propterea & utraque AC, BD, ipſi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.

c 33. primi.
d 1.2. Theod.
e 10.1. Theod.
f 10.1. Theod.
g 8. undec.

HÆC demonſtratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, ſunt circulorum diametri, ſed tunc EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, ut patet.

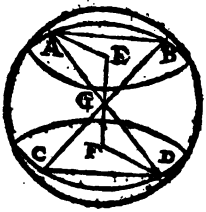
LEMMA IV.

Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ ſunt, & inter ſe æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in iis ductæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad eaſdem partes centrorum; quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro ſphæræ interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales.

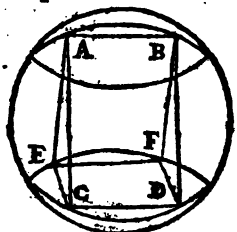
Quoniam

a 7. undecimi. *Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt: a erunt AD, BC, in eodem cum ipſis plano: ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto G: quod dico eſſe centrum ſphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis EA, EG: FD, FG.*



b 15. primi. *b Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem æquales ſunt:*
c 29. primi. *c Item tam alterni anguli BAD, CDA: quam alterni ABC, DCB: æquiangula erunt triangula ABG, CDG.*
d 4. primi. *d Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æquales,*
e 14. quinti. *e erunt quoque tam BG, CG, quam AG, DG, inter ſe æquales. Rurſus quia AE, DF, ſemidiametri circulorum æqualium æquales:*
f 29. primi. *ſunt autem ex 2. lemmate & parallelæ, f ideoque anguli alterni EAD, FDA, æquales: erunt duo latera EA, AG; duobus lateribus FD, DG, æqualia angulosque comprehendent æquales.*
g 4. primi. *g Igitur & baſes EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales ſunt.*
h 7. undecimi. *h Et quia AD, in eodem plano eſt, in quo parallelæ AE, DF:*
i 2. undecimi. *i & EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF: erunt EF, FE, in rectum & continuum conſtituta propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum ſphæræ tranſibit, vt in præcedenti lemmate demonſtrauimus,*
k 10. 1. Theod. *k perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales ſint oſtenſa,*
l 6. 1. Theod. *erit F, centrum ſphæræ, l propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro ſphæræ abſunt: inæqualiter verò abeſſent, ſi centrum ſphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri ſphæræ ſunt, & inter ſe propterea æquales. quod eſt primum.*

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad eaſdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter ſe eſſe, & angulos CAB, ABD, BCD, DCA, eſſe rectos. Quod enim ſint parallelæ & æquales;



m 33. primi. *m manifeſtum eſt, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, ſint perpendiculares, ita oſtendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti ſunt, erunt ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, ſemicirculi; ac proinde & reliqui arcus, EFD, CEF, ſemicirculi erunt,*
n 31. tertii. *n & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æqua-*

dæ ſunt, a ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. a 9 vndecimi.
lemmate AE, BF, ad plana circulorum recta erunt, ac proinde ex defin.
3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtramque FD, FB; vt
oſtendimus, b perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per b 4. vndecimi.
EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: c ac
propterea & CD, AB, ipſi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum c 8. vndecimi.
perpendiculares erunt: ideoq; ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD,
BDC, DCA, recti erunt. Quod eſt ſecundum.

LEMMA V.

Si in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt: Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniũgentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erũt, rectoſque cum ipſis angulos conficient.

SINT in ſphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC, BD, Dico AC, BD, æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt AB, CD, d erunt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano, e fiat in ſphæra circulus ABDC, in quo d 7. vndecimi. e 1. 1. Theod.



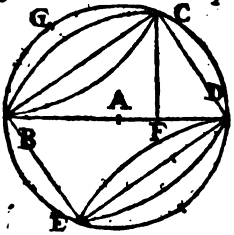
cum parallelæ ſint AB, CD: erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales: f ideoq; & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod ſi parallelæ f 29. tertii.
AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo oppoſita latera AB, CD, parallela, & æqualia: erit ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. ABDC: parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.

LEMMA VI.

In data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.

SIT ſphæræ centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. propoſ. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipſius FD, dupla ſit: erit BD, talium partium 3. qualium 2. eſt BF: ac proinde BD, ipſius BF, ſeſquialtera eſt. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungantur rectæ BC, DC, ductaque DE, ipſi BC, parallela, connectatur

a 29. primi. recta BE. a Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quam duo
b 31. tertij. BED, CBE, duobus rectis æquales ſunt: b eſtque tam BCD, quam
BED, rectus: erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex ſcho-
lio propoſ. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelo-
c 34. primi. grammum eſt: c ideoque rectæ BC, DE, æquales ſunt. Diviſo iam

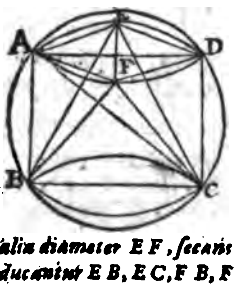


arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diviſus bifariam in G, quod ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales ſint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in ſuperficie ſphæræ deſcribantur tranſeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quam
d 2. 2. Theo. GE, GD: d qui paralleli erunt, cum eoſ-
e 15. 1. Theo. dem habeant polos. e Et quia circulus maximus BCDE, per polos ſecat circulos BC, ED, bifariam: erunt BC, ED, diametri ipſorum, quæ cum æquales ſint oſtenſæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum ſphæræ BD, ad utramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continue proportionales ſunt: erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. ut BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Eſt autem BD, ipſius BF, ſeſquialtera, ut oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeo & quadrati ex DE, ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ BD, utriuſque diametri BC, DE, potentia ſeſquialtera eſt. quod eſt propoſitum.

His demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

In data ſphæra Pyramidem deſcribere.



DESCRIBANTVR in data ſphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diametri ſphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD,
f 15. 1. Theo. f qui eos ad angulos rectos, ac bifariam ſecabit, ac proinde cum eis communes ſectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, ſecans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, eſſe pyramidem, hoc eſt, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, eſſe æquilatera & æqualia

qualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA, erit AC, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, deſcriptum ut conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ AC, ſeſquialterum eſt quadrati ex AD, diametro circuli: ſi ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, a æquale ſit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Eſt autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC, DF: b quibus cum æquale ſit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit: erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, proptereaque quadrati ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc eſt, ipſi BC, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur BF, eidem BC, æqualis: ideoque BCF, triangulum eſt æquilaterum. a 47. primi b 47. primi

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum eſt oſtenſum: eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: c quibus cum æquale ſit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit: duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo ſunt quadrata ex CE, AD, proptereaque recta CE, rectæ AD, hoc eſt, rectis BC, EF, æqualis eſt, atque adeo & rectæ CF, quæ ipſi BC, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam eſt, & ipſi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum BEF, eſſe æquilaterum, & ipſis BCF, FCE, æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipſi BC, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cum eius anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. quod erat propoſitum. c 47. primi

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Nam latus pyramidis eſt æquale diametro AD, vt oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diametri AD.

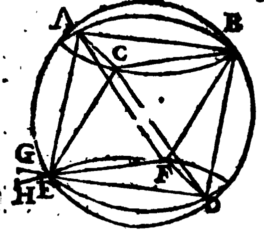
PROBL. 2. PROPOS. 2.

In data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo cir-

culi

culi æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt ſphæra diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera. a 2. quarti. a *Deſcripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, rectæ AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuerſas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Cum enim parallelæ ſint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ ſint AB, GE, & BC, EH, ad eaſdem partes plani per AB, GE, ducti: erunt quoque BC, HE, hoc eſt, BC, EF, parallelæ, ex illo ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipſi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ AB, DE, æquales ſunt & parallelæ ad diuerſas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE (quas tamen confuſionis vitandæ gratia non traximus) diametri ſphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipſas AB, DE.* b 47. primi. b *Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Poſito autem quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. quadratum ex DE, eſt 3. (Nam cum per conſtructionem diameter ſphæræ potentia ſit ſeſquialtera diametri circuli DEF: poſito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At poſito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, eſt 3. quod ex coro*[illegible] *propoſ. 12. libr. 13. diameter circuli potentia ſit ſeſquiter*[illegible] *trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD,* [illegible] *primi quadrata ex DE, BD, æqualia ſunt, & rectæ ipſæ DE, BD, æquales. Eſt autem DE, ipſi AB, per conſtructionem, & BD, ipſi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt conſtituentq; quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti ſint ex eodem 4. lemmate.*



RVRSVS quia BC, EF, parallelæ ſunt & æquales ad diuerſas partes centrorum: erunt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad eaſdem partes diametri ſphæræ, ex 4. lemmate: & rectæ BF, CE, æquales inter ſe, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rurſus, vt prius, quadratum BC[illegible]*. Non aliter oſtendemus, ACDF, quadratum eſſe*

eſſe, cum iuncta recta A D, C F, *ſint quoque ſphæræ diametri ex 4. lemmate &c. Cum ergo tria quadrata* AD, BE, CF, *conſtructa ſint ſuper latera æqualia* AB, BC, CA, *nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, cum* AB, *latus ſit quadrati* AD; *&* BC, *quadrati* BE; *&* CA, *quadrati* CF; *erunt omnia triangula octo* ABC, CAE, BCD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera, & inter ſe æqualia. Octaedrum ergo eſt* AD, *ex defin 27. libr. 11. & in data ſphæra deſcriptum, cum eius anguli ſolidi* A, B, D, E, C, F, *ſphæræ ſuperficiem attingant. quod eſt propoſitum.*

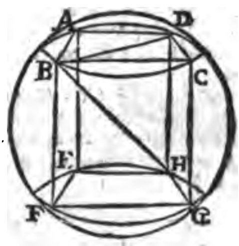
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplum eſſe lateris Octaedri in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex BE, diametro ſphæræ duplum eſſe quadrati ex DE, latere Octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data ſphæra cubum deſcribere.

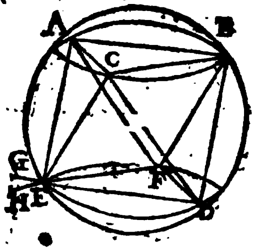
DESCRIBANTVR *ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac paralleli* ABCD, EFGH, *quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ.* a *Deſcripto autem quadrato* ABCD, a 6. quarti.
in circulo ABCD, *ducatur per 1. lemma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH, *& æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo* EFGH, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Cōpleto ergo quadrato* EFGH, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum* AD, EH, *æqualitatem: parallela vero, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ ſunt* AD, EH, *ſuntq; anguli*



æquales ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per* AD, EH, *ducti, & ſic de cæteris. Iungantur deniq; ad eaſdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico* AG. *eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera* ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, *eſſe quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate 4.* BH, *diameter ſphæræ; at* BD, *diameter circuli* ABCD, *quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur per conſtructionem, quadratum ex* BH, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *duplum, ex ſcholio propoſ 47. libr. 1. ſi ſtatuatur quadratum ex* BH, 3. *erit quadratum ex* BD, 2. *& qua-*

dratum ex D C, 1. *atque adeo quadratum ex* B H, *quadrati ex* D C *triplum erit. Rurſus quia quadratum ex* B H, *eſt* 3. *& quadratum ex* B D, 2. a *eſtque quadratum ex* B H, *æquale quadratis ex* B D, D H, *quod angulus* B D H, *ex defin.* 3 *lib.* 11. *rectus ſit, erit quadratum ex* D H, 1. *Quadratum igitur ex* B H. *triplum eſt quadrati ex* D H. *Fuit autem idem quadratum ex* B H, *triplum quadrati ex* D C. *Æqualia ergo ſunt quadrata ex* D C, D H, *ac proinde rectæ* D C, D H, *æquales. Cum ergo oppoſitis lateribus* G H, C G, *æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo* C H. *Cum*

a 47. primi.



igitur & anguli recti ſint, ex defin. 3. *libr* 11. *quadratum erit* C H. *Eadem ratione &* B E, A H, B G; *quadrata oſtendentur: Sed &* A C, E C, *quadrata ſunt ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt* A G, *ex defin.* 25. *lib.* 11. *& in data ſphæra deſcriptus, cum eius anguli ſolidi,* A, B, C, D, E, F, G, H, *ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ BH, triplum eſſe quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis eſt circulo A B C, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 21.

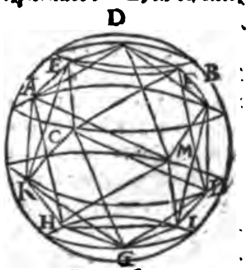
PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN datá ſphæra Icoſaedrum deſcribere.

b 14. ſexti. REPERIATVR b *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti: Fiatq́; ex coroll. propoſ.* 6. *lib.* 10. *vt numerus* 5. *ad* 1. *ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdam lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrum, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcri-*
c 1. quinti. *pto maximo circulo in ſphæra data,* c *accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cum hæc recta minor ſit diametro ſphæræ ſiue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam ſi per eam*
d 1. 1. Theod *rectam planum ducatur, rectum ad circulum illum maximum,* d *faciet id circulum* A B C, *in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtru-*

ctione,

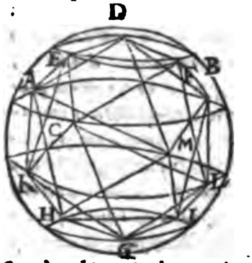
ctione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde inueniatur
a rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat datæ ſphæræ diameter, ut a 12. ſext
pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono de-
ſcripti; Fiatque ut 3. ad 1. ita per coroll. propoſ. 6. lib. 10. quadra-
tum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum
alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo A B C, parallelus;
quod fiet ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis
duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro,
ex iis, quæ ad propoſ. 1. lib. 4. demonſtrauimus, & per eam rectam pla-
num extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circu-
lum maximum rectum, ex ſcholio propoſ. 18. lib. 11. Nam per idem ſcho-
lium, planum hoc erit circulo A B C, parallelum, b facietque in ſphæra b 1. 1. Theod.
circulum D E F, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis
eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alii duo æquales
ac paralleli deſcribantur G H I, K L M, quod facile fiet, ſi illorum
diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo
ducantur, &c. c Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æqui- c 2. quarti.
latero D E F, ducatur lateri E F, in parallelo circulo A B C, ex lem-
mate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quæ
æqualis ſit uni lateri trianguli æquilateri in circulo A B C, deſcripti:
Item huic A B, agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circulo
K L M, & æqualis: Ac denique huic K L,
in circulo G H I, ducatur ex altera parte
centri, parallela H I, & æqualis ipſi E F,
hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in cir-
culo G H I, deſcripti. Completis ergo tri-
angulis æquilateris A B C, K L M, G H I,
erunt ſingula latera ſingulis lateribus tri-
anguli D E F, parallela; nimirum A C,
M L, G H, ipſi D F; at B C, M K, G I, ipſi
D E, quod probabitur ex ſcholio propoſ. 16.



libr. 11. ut in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe B C, E F,
ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea
triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum con-
fuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus.
Poſtremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilate-
rorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, vi-
delicet ex puncto D, rectæ D E, D A, D M, D B, D F; ex G, rectæ G H,
G K, G C, G L, G I, &c. ut in figura apparet. Ex quolibet enim pun-
cto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico D G, eſſe Icoſae-
drum, hoc eſt, viginti triangula D E F, D E A, D A M, D M B,
D F B, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod ut demonſtretur, o-
ſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe au-
tem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16.

lib. 13.) ſuos 12. *angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.*

SIT *igitur in ſphæra deſcriptum Icoſaedrum* D G, 12. *angulos ſtatuens in punctis* D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. *Et quia* 5. *rectæ* D E, DA, DM, DB, DF, *æquales ſunt, cum ſint latera triangulorũ æquilaterorum æqualiũ; ſi ex polo* D, *per* E, *in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta* A, M, B, F; *ac propterea pentagonum* E A M B F, *in uno plano erit, nimirũ in plano illius circuli. Cum ergo eius latera ſint æqualia, utpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt à nobis.*



Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit A K, C F D, *ob quinq; rectas æquales* EA, E K, E C, E F, E D: *Et* K H M D E, *ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia* A K, AH, A M, A D, A E: *Et* H G C E A, *ob quinque latera Icoſaedri æqualia* K H, K G, K C, K E, K A: *Et* G I M A K, *ob latera quinque Icoſaedri æqualia* H G, H I, H M, H A, H K: *Et* I L C K H, *ob quinque rectas æquales* G I, G L, G C, G K, G H: *Et* L B M H G, *ob rectas quinque æquales* I L, I B, I M, I H, I G: *Et* B F C G I, *ob quinque rectas æquales* L B, L F, L C, L G, L I: *Et* F D M I L, *ob quinque rectas æquales* B F, B D, B M, B I, B L: *Et* D E C L B, *ob rectas quinque æquales* F D, F E, F C, F L, F B: *Et* D A H I B, *ob quinque latera Icoſaedri æqualia* M D, M A, M H, M I, M B: *Ac tandem* G L F E K, *ob quinque Icoſaedri latera æqualia* C G, C L, C F, C E, C K, *ita ut* 12. *pentagona æquilatera, æquiangulaq; inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, ut in ſcholio propoſ. 8. libr. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta* A B, *ipſi* E F, *parallela in pentagono* E A M B F: *& A C, iuncta ipſi* D F, *parallela in pentagono* A K C F D: *Et*

a 15. *unde- cimi.* B C, *iuncta parallela ipſi* D E, *in pentagono* D E C L B. a *Plana ergo per rectas* D E, E F, *&* C B, B A, *ducta parallela ſunt,* b *faciuntque*

b 1. 1. *Theod* *circulos parallelos in ſphæra* D E F, A B C. *Eodem modo erit iuncta* K E, *ipſi* H I, *parallela in pentagono* I L C K H: *Et iuncta* K M, *ipſi* G I, *in pentagono* G I M A K: *Et* L M, *iuncta ipſi* G H, *in pentagono* L B M G H: *Ac propterea circuli in ſphæra paralleli erunt* G H I, K L M. *Non aliter erit* A B, *iuncta ipſi* H I, *parallela in pentagono*

c 9. *unde- cimi.* D A H I B: *Et iuncta* K L, *ipſi* E F, *in pentagono* G L F E K. c *Igitur* E F, H I, *cum ſint eidem iunctæ* A B, *vel* K L, *parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt, Eademque ratione* D E, G I, *cum ſint eidem iunctæ* B C, *vel* K M, *parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea que plana circulo-*

culorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ductæ parallelæ erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter ſe ſunt: & tam circuli DEF, GHI, inter ſe æquales, ob triangula æquilatera in illis deſcripta æqualia, quam circuli ABC, KLM, inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipſis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, conſtituuntur: quippe cum latera hæc ſint rectæ ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.

QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad eaſdem partes extrema K, B, parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæræ diameter eſt, & angulus BAK, rectus ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad eaſdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; a erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rurſus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipſi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cum latus pentagoni poſſit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; erit diameter ſphæræ KB (quæ ambas AB, AK, poteſt, vt oſtendimus) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus eſt hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare ſphæræ diameter KB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cum tam AB, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli, erunt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales ſunt, illi, quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri initio inuentæ, minorem eſſe diametro ſphæræ, vt ſupra diximus.

a 47. primi.

b 10. tertiidecimi.

a 12. tertiidecimi.

HIS demonſtratis facili negotio includemus, ſolidam figuram à nobis deſcriptam DG, eſſe Icoſaedrum, cum Icoſaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis triangulum DEF, omnes eius anguli ſolidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, à quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Icoſaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, ſphæræ diametrum ad latus Icoſaedri in ea deſcripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum: adeo vt ſi diameter ſphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icoſaedri ſit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam deſcripto Icoſaedro DG, in ſphæra, oſtenſum eſt

eſſe diametrum ſphæræ KB, ad BF, latus Icoſaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icoſaedri maius eſſe ſemidiametro ſphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius eſt ſemiſſe lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulũ Iſoſceles conſtituant: a ac propterea duo latera decagoni maiora ſint latere pentagoni, ideoq; vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

a 22. primi.

COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonſtratis, diametrum ſphæræ eſſe potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti. Quoniam enim eſt, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, deſcriptorum, ita diameter ſphæræ KB, ad iunctam AB, ex conſtructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum ſphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum AB. b Eſt autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc eſt, ſemidiameter) potentia ſubtriplum rectæ iunctæ AB, quod AB, ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti.

b 12. tertii-decimi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR *in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſitione* ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, *ita vt ſemidiametri circulorum* ABCDE, QRSTV, *ſint potentia ſubtripla duarum rectarum, ad quarum diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; ſemidiametri vero circulorum* FGHIK, LMNOP, *potentia ſint ſubtripla duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pẽtagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto aũt in circulo* ABCDE, *pentagono* ABCDE *æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri* CD, *ad eaſdem partes centrorum parallela* HI, *in circulo* FGHIK, *& æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex* 1. *lemmate: Rectæ autem* HI, *ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela* LP, *in circulo* LMNOP: *Huic tandem* LP, *ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela* QV, *in circulo* QRSTV. *Completis autem pentagonis in hiſce tribus circulis (quorum tamen latera, vt confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantum extrema puncta notauimus) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pẽtagoni*



ABC-

ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallelæ ductæ ſunt: quod demonſtrabitur, vt in problemate ſecundo oſtendimus, parallelas eſſe BC, EF, nimirum HG, FO, TV, latera iuncta, parallela erunt ipſi BC, &c. Poſtremo ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona ABCDE. DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera eſſe æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrandum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſitione 17. lib 13.) ſuos viginti angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem viginti puncta notauimus.

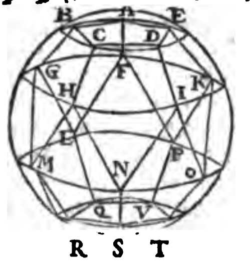
SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſit. 8. libr. 13. demonſtrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KE, ipſi AE, in pentagono AEKPF; & FG, ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ ſunt; a erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæ rectæ rectis AB, BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſitionis 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter ſe parallela ſunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, ſint parallela; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per FK, FI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, Eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter ſe æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL. c quæ omnes æquales ſunt, cum ſubtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

a 15. vndecimi.

b 1. 1. Theod.

c 4. primi.

DEINDE *quia ex ſcholio propoſ 8. lib. 13. recta iuncta* N D, M B,
a 9. vndecimi. *lateri* C H, *parallelæ ſunt in pentagonis,* C H N I D, B G M H C; a *erunt*
quoq; ipſa iuncta N D, M B, *parallelæ: Sunt autem & æquales: quod*



æquales angulos in pentagonis æqualibus ſubtendant. b 33. primi. b *Igitur & iunctæ* N M, B D, *æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ* N O, C E, *cum connectant duas* N C, O E, *æquales ac parallelas, quod vtraq; lateri* D I, *ſit parallela.* c 15. vndecimi. c *Circulus igitur* L M N O P, *circulo* A B C D E, *parallelus eſt, cum ille ducatur per rectas* N M, N O, *hic vero per rectas* B D, C E, *quibus illæ parallelæ ſunt oſtenſæ. Non ſecus oſtendemus parallelos circulos* Q R S T V, F G H I K. *Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſunt.*

RVRSVS *quoniam iunctæ rectæ* E F, O V, *cum ex ſcholio propoſ. 8. libr 13. lateri* P K, *in pentagonis* A E K P F, T V K P O, *æquidiſtent,*
d 9. vndecimi. d *parallelæ ſunt; necnon & inter ſe æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus ſubtendant,* e *erunt & rectæ iunctæ*
e 33. primi. E O, F V, *parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo* E F V O, *in vno*
f 7. vndecimi. *plano eſt,* f *cum* E F, O V, *in eodem ſint plano cum parallelis* E O, F V. *Eſt autem & in circulo,* g *propterea quod planum in quo*
g 1. 1. Theod. *exiſtit, in ſphæra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propoſ. 31. lib. 3. demonſtrauimus, cum in eo quadrilatero oppoſita latera æqualia ſint, quadrilaterum rectangulum eſt* E F V O; *ac proinde cum omnia latera æqualia ſint, ſubtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter* F O, *duplum poteſt lateris* F E, *ex ſcholio propoſ. 47. libr. 1. hoc eſt, rectæ iunctæ* F G, *quod æquales ſint* F G, F E, *ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoque qualium partium* 1. *ſtatuetur quadratum rectæ* F G, *talium* 2. *erit quadratum rectæ* F O, *& ambo quadrata ſimul*
h 47. primi. *earundem partium* 3. *Quibus* h *cum æquale ſit quadratum iunctæ rectæ* O G, *quæ diameter ſphæræ eſt. (Nam cum æquales ſint iunctæ* F G, O N, *ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelæ, quod duabus parallelis* A B, S T, *parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta* O E, *ad* F G, *perpendicularis, &* O G, *diameter ſphæræ) erit quoque quadratum diametri ſphæræ 3. qualium* 1. *eſt quadratum rectæ* F G, *hoc eſt, quadratum*
i 12. tertijdec. *diametri ſphæræ quadrati rectæ* F G, *triplum erit.* i *Eſt autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ* F G, *ita quadratum lateris trianguli ad*
k 12. ſexti. *quadratum lateris hexagoni;* k *atque adeo vt diameter ſphæræ ad rectam* F G, *ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem re-*

item recta F G, ad latus trianguli in eodem circulo F G H I K, ita eſt latus pentagoni eiuſdem circuli ad latus trianguli, quod F G, ſit latus

Diam. ſphæræ	Latus pentag.
Recta F G.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit; vt diameter ſphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo F G H I K, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque vt diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad iunctam rectam A B, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, vt iuncta recta FG, ſubtendens angulum pentagoni ABGLF, ad A B, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad A B, latus pentagoni in circulo A B C D E, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE: erit quoque vt latus trianguli in circulo FGH I K, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, vt proxime demonſtratum eſt. Igitur ex æquo erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita latus

Diam. ſphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, vt diameter ſphæræ ad E F, latus trianguli in circulo D E F, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus D E F, G H I, figuræ antecedentis propoſ. vtrique circulo A B C D E, QRSTV, huius figuræ æqualis. Quare circuli A B C D E, F G H I K, LMNOP, QRSTV, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.

QVIBVS demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram LS, à nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum A B C D E, omnes eius anguli ſolidi cadant in quinta puncta aliorum trium circulorum parallelorũ, à quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere

& trian-

& triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo A B C D E, figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.

MANIFESTVM quoque eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

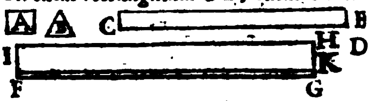
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & libr. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademque ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cum poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper à minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quàm octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus D E, lateri eiuſdem quadrati æquale: Eritque rectangulum C E, octuplum quadrati A, a cum ſit, vt C D, ad latus quadrati A, ita [a 1. ſext.] *rectangulum C E, ad quadratum A; ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſæ, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi G H, hoc eſt* [b 1. ſext.] *altitudini trianguli, B, b vigecuplum eſt trianguli B: Ei autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. libr. 1. rectangulum F H, quippe cum baſis F G, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igi-* [c 12. quartiſdecimi.] *tur eſt, rectangulum F H, maius eſſe rectangulo C E. c Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus D E, potentia ſeſquitertium eſt ad*



perpen-

perpendicularis, hoc eſt, lateris G H: Latus autem F G, ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod F G, ſit 10. & C D, 8. hoc eſt, F G, 5. & C D, 4. Erit maior proportio F G, ad C D, quam D E, ad G H. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſuper nouempartiens ſextadecimas, quam 4. ad 3. ſeſquitertia, quod maior ſit fractio $\frac{9}{16}$ *quam* $\frac{1}{3}$ a *Fiat vt F G, ad C D, ita D E, ad H K, eritque maior quoque* a 12. ſexti.
proportio D E, ad H K, quam ad G H: b *ac proinde maior erit G H, quam* b 10. quinti.
H K. Ducta ergo K I, ipſi F G, parallela, erit vt I K, ipſi F G, æqualis ad C D, ita D E, ad H K. c *Igitur erit I H, rectangulum rectangu-* c 14. vel 16.
lo C E, æquale: ideoque E H, maius, quam C E. Quod eſt propoſi- ſexti.
tum.

II.

O C T O quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

d *QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæræ deſcripta ſu-* d 20. quarti-
perficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo vero eadem qua- decimi.
drata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcriptis; quod quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæræ æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ. Quod eſt propoſitum.

III.

S I octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit perpendicularis è centro ſphæræ ad vnam baſin Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſin octaedri, & cubi ducta.

NAM e *quia latus octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem* e 18. tertii-
ſphæra: erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo dec.
Icoſaedri. Quare ſi vtrumque ſolidum ita intra ſphæram conſtituatur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum; longius à centro aberit Icoſaedri triangulum, quam triangulum Octaedri: cum vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro ſphæræ ad baſin Icoſaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſin Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi: f *quod baſis cubi, & ba-* f 21. quartide-
ſis octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideoque æqualiter à centro cimi.
diſtent: erit quoque perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior; quod eſt propoſitum.

IV.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribatur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadem ſphæræ ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demonſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæræ conſtructis, quod latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæræ maius ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri multo maiora ſunt octo quadratis ex ſphæræ ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulo ante demonſtrato: erit quoque Icoſaedri ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.

DE COMPARATIONE SOLIDITAtum quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum deniq; maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

a 11. quartidecimi.
b 18. tertiidec.

QVONIAM eſt, a vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum: b eſt autem latus cubi latere Icoſaedri maius: maius quoque erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpendicularis ex centro ſphæræ in vnam baſ[...] Icoſaedri cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vn[...] baſin cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Item [...] 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoque [...] Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vn[...] baſin Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri contentu[...] maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in v[...] nam baſin cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi contin[...] Cum ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. libr. 14. demonſtrauimus, illud ſo[...] du[...]

lum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icoſaedrum
quam cubus. Quod eſt propoſitum.

III.

Cubus Octaedro maior eſt.

Quoniam eſt, a vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita a 27.
cubus ad Octaedrum: Eſt autē latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius quarti-
(Nam b cum latus cubi maius ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, decimi.
ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ; erit b 18. ter-
latus cubi multo maius ſemidiametro ſphæræ) Igitur & cubus maior tiidec.
erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.

IV.

Octaedrum Tetraedro maius eſt.

Quoniam baſis octaedri minor eſt baſe Tetraedri, c quod baſis c 14.
Tetraedri ad baſem octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit quarti-
perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſin octaedri demiſſa, decimi.
maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſin Tetrae-
dri cadente: quod probabitur non aliter, quam ſupra theoremate 3. o-
ſtendimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorem eſſe perpendiculari
in octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies octaedri ſuperficie Tetra-
edri maior, d cum illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum conten-
tum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſin Octaedri ca- d 14.
dente, & tertia parte ſuperficiei octaedri, maius eſt ſolido contento ſub quarti-
perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſin Tetraedri de- decimi.
miſſa, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cum ex ſcholio
propoſ. 20. libr. 14. illud ſolidum octaedro ſit æquale, hoc vero Tetrae-
dro: erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propo-
ſitum.

Aliter. Quoniam eſt, e vt latus Octaedri ad latus Tetrae- e 22.
dri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetrae- quarti-
dri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Tetraedri ad tertiam decimi.
eius partem, id eſt, ad ipſum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit
quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita
Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius ſit ter-
tia parte lateris Tetraedri (Nam f quia quadratum lateris Te- f 18. ter-
traedri ſeſquitertium eſt quadrati lateris Octaedri; habebit latus tiidec.
Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem ſeſquitertia, i-
deoque multo minorem tripla; g ac proinde tertia pars lateris Tetrae-
dri minor erit latere Octaedri) Erit quoque Octaedrum Tetraedro g 10.
maius. Quod eſt propoſitum. quinti.

Aliter. Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum ſe habet,

vt rectangulum ſub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri ſphæræ; Eſt autem rectangulum illud minus quadrato diametri ſphæræ, quod eius latera minora ſint ſphæræ diametro; quippe quæ ſingula minora ſint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc eſt, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod eſt propoſitum.

a 32. quartidecimi. b 27. quartidecimi. Aliter. a Quoniam cubus triplus eſt Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum eſt, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ; & latus cubi minus eſt, quam triplum ſemidiametri ſphæræ, quod & tota diameter, quæ cubi latere maior eſt, minorem proportionem habeat ad ſemidiametrum, quam triplam) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod eſt propoſitum.

Eodem prorſus ordine ſe mutuo ſuperant conuexa ſuperficies eorundem corporum regularium: hoc eſt, ſuperficies conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri: Superficies conuexa Icoſaedri maior ſuperficie conuexa cubi: Conuexa ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior: Octaedri deniq; ſuperficies conuexa maior eſt conuexa ſuperficie Tetraedri.

c 6. quartidecimi. d 18. tertiidec. Quoniam enim c eſt ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri: Eſt autem cubi latus Icoſaedri maius, d vt ſupra demonſtratum eſt: Erit & ſuperficies Dodecaedri ſuperficie Icoſaedri maior.

Superficiem vero Icoſaedri minorem eſſe ſuperficie Cubi, demonſtratum eſt paulo ante theoremate 4. ante comparationem ſoliditatum quinque corporum Regularium.

e 27. quartidecimi. Deinde e quoniam eſt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus, cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum eſt; Erit quoque ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior.

f 14. quartidecimi. Deniq; f quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuum eſt, Octaedri ſuperficiem maiorem eſſe Tetraedri ſuperficie,

g 18. tertiidec. Vides igitur ſuperficies & ſoliditates corporum Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam ſuperficiem, at eo minus latus. Nam g vt ſupra demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius vero ſuperficies atque ſoliditas, vt hic demonſtrauimus, omnium minima eſt: Item Dodecaedri latus omnium eſt minimum, eius vero conuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eadem ſphæra deſcripta

ſcripta

ſcripta ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atque ab Euclide deſcripta, ſe mutuo ſuperant, a vt ſupra oſtenſum eſt, ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexa, atq; ſoliditates ſe mutuo ſuperant; vt hoc loco demonſtrauimus. a 18. tertiidec.

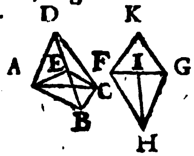
Cæterum prætereundum non eſt hoc loco id, quod à Pappo demonſtratum eſt lib. 4. Mathematicarum collectionum: ſoliditates videlicet quinque corporum Regularium, ſi Iſoperimetra ſint, atque idcirco, non in eadem ſphæra conſtructa, longe aliter ſe habere, quam à nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita vt Icoſaedrum ſuperet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius ſit.

INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS duarum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

Angulum inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

Sit pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum ABD, CBD, in quibus exiſtunt (b Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, baſium ABD, C B D, continebunt, ex defin. 6. li. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH: triangulum æquilaterum ſuper rectam F G, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atque idcirco triangulo cuicunq; pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum ABD, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, conſtituatur ſuper FG, triangulum FG K, habens vtrumque latus FK, GK, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, vtrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem eſſe angulo inclinationis A E C, baſium ABD, CBD. Cum enim latera c F, K G, æqualia ſint lateribus E A, E C: & baſis FG, baſi AC; æquales erunt anguli FKG, AEC. Dico inſuper angulum inclinationis ACE, acutum eſſe. d Cum enim latus A D, vel illi b 8. primi. c 8. primi. d 12. quarti.



æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterũ AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

COROLLARIVM.

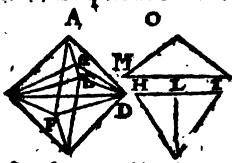
Facile hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia ſint æqualia.

II.

Angulum inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

Exhibeatur octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE. triangulis ABE. ADE, commune, biſariamq; ſectum in G, rectæ ducantur BG. DG. quæ cum perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE, ADE. in quibus exiſtunt a (quod in triangulis BGA. BGE anguli ad G. æquales ſint, &c.) continebunt

a 6. primi.



angulum BGD, inclinationis baſium ABE. ADE. per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI. lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE. æquale, in quo ducta KL. perpendiculari ad HI. conſtituatur ſuper recta MN. quæ æqualis ſit diametro octaedri BD. hoc eſt, diametro quadrati ABCD. ex AB. latere octaedri deſcripti; triangulum OMN. habens vtrunque latus MO. NO. perpendiculari KL. æquale, hoc eſt, vtriq; perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL. BG. DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE. ADE. Cum enim latera OM. ON. æqualia ſint lateribus GB. GD. & baſis MN. baſi BD; b æquales erunt anguli MON, BGD. Dico propterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum.

b 8. primi.

Cum

a Cum enim diameter octaedri B D, dupla ſit potentia lateris A B: *b* latus vero A B, potentia ſeſquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4 erit quadratum lateris *A* B, earundemq; 3. quadratum rectæ B G; ideoq; ambo ſimul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo G B D, maius eſt quadratis ſimul laterum G B, G *D*; *A*c propterea angulus G B *D*, obtuſus erit, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 2. oſtendimus. *a 14. tertii dec.* *b 12. quarti decimi.*

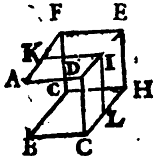
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes baſium octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt B G, D G, ſubtendanturque ab octaedri diametris, cuiuſmodi eſt B D; omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent æquales ſint, necnon & diametri octaedri eoſdem ſubtendentes ſint æquales. *c 8 primi.*

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram, invenire.

SIT cubus *A* B C *D* E F G H, in quo ſecetur latus *D* E, bifariam in I, nec non & latera illi oppoſita in quadratis *A* E, E *C*, commune latus illud *D* E, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur I k, I L; *d* quæ cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus E F, E H (quod & k F, I E, inter ſe, nec non & I E, L H, inter ſe æquales exiſtant, & parallelæ) ideoq; *e* angulos rectos ad latus *D* E, efficiant, continebunt k I L, angulum inclinationis baſium *A* E, E *C*, ex defin 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ I k, I L, parallelæ exiſtentes rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, *f* angulum k I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis baſium cubi. Quare vt angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, conſtituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonſtravimus, æqualis erit angulo inclinationis baſium cubi. *d 3. primi.* *e 29. primi.* *f 10. vndecimi.*



COROLLARIVM.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum: perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, invenire.

ESTO pyramis *A* B C *D* E F, vna ex 12. pyramidibus Icoſaedri,

æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterũ AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

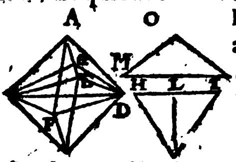
COROLLARIVM.

Facile hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſūt AE. CE, ſubtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erũt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia ſint æqualia.

II.

A ngulum inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

Exhibeatur octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE. triangulis ABE. ADE, commune, bifariamq; ſectum in G, rectæ ducantur BG. DG. quæ cum perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE. a 6. primi. ADE. in quibus exiſtunt a (quod in triangulis BGA. BGE anguli ad G. æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE. ADE. per deſin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI. lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta KL. perpendiculari ad HI. conſtituatur ſuper recta MN. quæ æqualis ſit diametro octaedri BD. hoc eſt, diametro quadrati ABCD. ex AB. latere octaedri deſcripti; triangulum OMN. habens vtrunque latus MO. NO. perpendiculari KL. æquale, hoc eſt, vtriq; perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL. BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE. ADE.



b 8. primi. Cum enim latera OM. ON. æqualia ſint lateribus GB. GD. & baſis MN. baſi BD; b Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico propterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum

Cum

a Cum enim diameter octaedri B D, dupla ſit potentia lateris A B: b latus vero A B, potentia ſeſquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4 erit quadratum lateris A B, earundemq; 3. quadratum rectæ B G; ideoq; ambo ſimul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo G BD, maius eſt quadratis ſimul laterum G B, G D; Ac propterea angulus G BD, obtuſus erit, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 2. oſtendimus.

a 14. tertii dec. b 12. quarti decimi.

C O R O L L A R I V M.

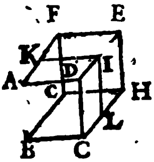
HINC fit, omnes inclinationes baſium octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt B G, D G, c ſubtendanturque ab octaedri diametris, cuiuſmodi eſt B D; omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent æquales ſint, necnon & diametri octaedri eoſdem ſubtendentes ſint æquales.

c 8 primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram, invenire.

SIT cubus A B C D E F G H, in quo ſecetur latus D E, biſariam in I, nec non & latera illi oppoſita in quadratis A E, B C, cōmune latus illud D E, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur I K, I L; d quæ cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus E F, E H (quod & K F, I E, inter ſe, nec non & I E, L H, inter ſe æquales exiſtant, & parallelæ) ideoq; e angulos rectos ad latus D E, efficiant, continebunt K I L, angulum inclinationis baſium A E, E C, ex defin 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ I K, I L, parallelæ exiſtentes rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, f angulum K I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis baſium cubi. Quare vt angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, conſtituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonſtravimus, æqualis erit angulo inclinationis baſium cubi.



d 3. primi. e 29. primi. f 10. vndecimi.

C O R O L L A R I V M.

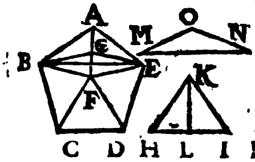
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum: perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, invenire.

ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidibus Icoſaedri,

dri, cuius baſis pentagonum ABCDE, ex quinq; Icoſaedri lateribus compoſitum, vertex autem F. Diuiſo itaque latere AF, biſariã in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, cõmune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppoſitis rectę BG, EG, quę cum ex demonſtratis in probl. 2. huius ſcholij, perpendiculares ſint ad AF, communem ſectionem planorum ABF, AEF,



in quibus ducuntur, comprehendent BGE angulum inclinationis baſium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus ęqualẽ, hac arte. Accipiatur triangulũ æquilaterum HIK, ſuper rectam HI, lateri Icoſaedri æqualem fabricatum, hoc eſt, cuiuis triangulo Icoſaedri, ipſi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, conſtruatur ſuper recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, ſubtẽdenti ſit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumq; latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc eſt, vtriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualib. ſint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis baſiũ ABF, AEF, æqualem eſſe. Cum enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GE, & baſis MN, baſi BE; *a* Aequales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, eſſe obtuſum. Cum enim BG, angulum rectũ faciat AGB, *b* erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemq; modũ AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, poſitæ ſint æquales. Si itaq; recta BE, ſuper rectam ſibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ *AB*, *AE*, rectas OM, ON, prorſus includant. *c* *Angulus* ergo O, maior erit angulo B*AE*: *At* hic obtuſus eſt (cum enim quinque anguli pentagoni ſex rectis ſint æquales; per ea, quæ à nobis ſunt demonſtrata in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac inſuper vnius recti partem quintã. Obtuſus ergo erit, cum recto ſit maior) Multo igitur magis obtuſus erit angulus MON, hoc eſt, ſibi æqualis BGE.

COROLLARIVM.

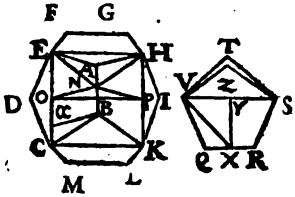
Non obſcure quoque ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales eſſe. Nam cum ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, FG, ſubtendanturq; à rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, cuiuſmodi eſt BE: omnes inter ſe erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipſos continent, ęquales ſint, necnon & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos ſubtendunt: æquales æqualibus rectis comprehenſos, æquales erunt.

ANGV-

V.

Angulum inclinationis duarum baſium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

Cum per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15 quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnũ latus coeuntiũ; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundũ angulos EAH, CBK. His porro pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pẽtagonorũ D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, biſariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſiũ ABCDE, ABKLH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur VS, æqualis exiſtens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia ſint, anguloſq; contineant æquales. Diuiſa deinde recta QR, biſariam in X, ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpendicularis ad VS, cum VS, ſit parallela ipſi QR, ex ſchol. propoſ. 8 lib. 13. Ac poſtremo ſuper recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, anguloſq; comprehendant æquales: Aequales ſunt & baſes NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideoque & reſidui ex rectis: anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP: necnon & angulis VXY, VYX, trianguli VXY (ſunt n. EON, HPN, VYX, oſtenſi recti) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratum; Aequalia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis late-



late-